Beweismethoden

Definitionen (7.0)

- **Annahme (=Hypothese):** Aussage, von der man annimmt, dass sie wahr ist
- **Satz (=Theorem):** Die zu beweisende Aussage (d.h.: Kann aus Annahmen gefolgert werden)
- **Lemma:** Hilfssatz, um einen anderen (wichtigeren) Satz zu beweisen
- **Korollar:** Satz, der aus einem anderen (wichtigeren) Satz folgt

Merke: □ oder „q.e.d" steht für „Was zu beweisen war" und „z.z.:" für „Zu zeigen:".

Direkter Beweis (7.1)

Vorgehen: Zeige direkt, dass die zu beweisende Aussage stimmt.
Beispiel: z.z.: ((a-b)>0 ⇔ a>b). Beweis: (a-b)>0 ⇔ a>0+b ⇔ a>b □

Indirekter Beweis (=Widerspruchsbeweis) (7.2)

Vorgehen: Zeige für eine zu beweisende Aussage S, dass aus ¬(S) ein Widerspruch folgt.
Beispiel: z.z.: ((a=b) ⇒ ((a-b)=0)). Beweis: Seien a=b und (a-b)≠0: (a-b)≠0=(a-a) ⇒ a≠b ⇒ ↯ ⇒ S gilt □

Induktionsbeweise (7.3)

Induktionsbeweise werden verwendet um Aussagen der Form: „Für alle n∈X gilt S(x)" zu beweisen.

Vorgehen: Zeige, dass S für den einfachsten Fall gilt (**Induktionsanfang - I.A.**) und zeige anschließend rekursiv, dass S auch für alle komplizierteren Fälle gilt (**Induktionsschritt**).
Für den Induktionsschritt nimmt man dabei an, dass S für einen beliebigen Fall gilt (**Induktionsvoraussetzung - I.V.**) und folgert daraus, dass S auch für den nächst komplizierteren Fall gilt (**Induktionsschluss - I.S.**).

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion wird verwendet um Aussagen der Form „Für alle n∈$\mathbb{N}_0$ mit n≥n_0 gilt S(n)" zu beweisen, wofür wir S(n_0) im Induktionsanfang und S(n) ⇒ S(n+1) im Induktionsschritt zeigen.

Beispiel: z.z.: Für alle n∈$\mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} k + 1 = \sum_{k=1}^{n+1} k$ ⇒ Beweis mittels vollständiger Induktion:
I.A.: n=0: $\sum_{k=0}^{n} k + 1 = \sum_{k=0}^{0} k + 1 = 0+1 = 1 = \sum_{k=1}^{0+1} k = \sum_{k=1}^{n+1} k$
I.V.: Für ein beliebiges, aber festes n∈$\mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} k + 1 = \sum_{k=1}^{n+1} k$
I.S.: $\sum_{k=0}^{n+1} k + 1 = (\sum_{k=0}^{n} k + 1) + (n+1) \overset{I.V.}{=} (\sum_{k=1}^{n+1} k) + (n+1) = \sum_{k=1}^{(n+1)+1} k$ □

Starke Induktion

Die Starke Induktion ist eine Verallgemeinerung der Vollständigen Induktion, bei der wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, dass die zu zeigende Aussage für mehrere vorherige Werte gilt.

Dies wird benötig, um Aussagen über mehrfach rekursiven Funktionen - wie beispielsweise der Fibonacci-Funktion fib(n) = fib(n-1)+fib(n-2) - zu beweisen.

Wohlfundierte Induktion

Die Wohlfundierte Induktion ist eine Verallgemeinerung der Starken Induktion, mit der man Aussagen auch über anderen Mengen als $\mathbb{N}_0$ und anderen Relationen als < beweisen kann. Diese Relationen müssen jedoch **wohlfundiert** sein, was bedeutet, dass man von jedem Element in einer endlichen Anzahl von „Schritten" zurück zu einem „linkesten" (minimalen) Element gelangen kann.

Dann können wir über einer solchen Relation R eine Aussage S beweisen, indem wir im Induktionsanfang S(a) für alle minimalen Elemente a zeigen und im Induktionsschritt für alle anderen Elemente b zeigen, dass S(b) gilt, wenn S(a) für alle a mit {a,b}∈R gilt.