Allgemeine Normalform

Christian Mendl

27. Mai 2005

1 Einführung

Sei stets K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Dimension n. $K[X]$ bezeichne den Polynomring über K in der Unbekannten X. $\mathbb{N}$ steht für die natürlichen Zahlen ohne 0.

Definition 1. *Sei $p = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $d \geq 1$. Dann heißt*

$$L(p) := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in K^{d \times d}$$

die Begleitmatrix zu p.

Satz und Definition 2. *(Allgemeine Normalform)*
Sei $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, dann gibt es eine Basis B von V mit folgender Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich B:

$$D_B(\phi) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix} \tag{1}$$

für $i = 1, \ldots, m$ ist $e_i \in \mathbb{N}$ und $p_i \in K[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom, so dass

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{L(p_i)} & & & \\ {}^1 & \boxed{L(p_i)} & & \\ & & \ddots & \\ & & {}^1 & \boxed{L(p_i)} \end{pmatrix} \quad (L(p_i) \text{ tritt } e_i \text{ Mal auf}) \tag{2}$$

Die Darstellungsmatrix heißt allgemeine Normalform (ANF) von ϕ, die Matrizen J_i heißen verallgemeinerte Jordan-Kästchen; die Basis heißt verallgemeinerte Jordanbasis. Bis auf Vertauschung der Kästchen ist die allgemeine Normalform eindeutig.

2 Moduln über euklidischen Ringen

Zum Beweis von Satz und Definition 2 benötigen wir einen Satz zu Moduln über euklidischen Ringen. Deswegen sollen hier einige grundlegende Definitionen angegeben werden.

Definition 3. *(Euklidischer Ring)*
Sei R ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit einem Einselement. R heißt euklidisch, falls es eine Funktion $\delta : R \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass zu $f, g \in R$ mit $g \neq 0$ Elemente $q, r \in R$ existieren mit $f = g\,q + r$ und $\delta(r) < \delta(g)$.

Beispiele:

- $R = \mathbb{Z}$ mit $\delta(z) = \big|z\big|,\ z \in \mathbb{Z}$
- $R = K[X]$ mit $\delta(f) = \begin{cases} \deg(f) + 1, & f \neq 0 \\ 0, & f = 0 \end{cases},\ f \in K[X]$

Sei nun stets R ein euklidischer Ring.

Definition 4. *Sei $p \in R$. p heißt irreduzibel, falls*

- $p \neq 0$
- $p \nmid 1$
- $\forall a, b \in R$ *mit* $p = a \cdot b$ *gilt:* $p \,|\, a$ *oder* $p \,|\, b$.

Für $R = \mathbb{Z}$ sind die irreduziblen Elemente gerade die Primzahlen (wenn man negative Primzahlen zulässt), für $R = K[X]$ sind es die irreduziblen Polynome.

Definition 5. *Sei $I \subseteq R$. I heißt Ideal in R, falls I ein Untermodul von R, aufgefasst als Modul über sich selbst, ist. Konkret:*

- $I \neq \emptyset$
- $a + b \in I \quad \forall a, b \in R$
- $r \cdot a \in I \quad \forall r \in R, a \in I$.

Für $a \in R$ setzen wir

$$(a) := \{r \cdot a \,|\, r \in R\}\,.$$

Satz 6. *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann gibt es $a \in R$ mit*

$$I = (a)\,.$$

Beweis. Für $I = \{0\}$ gilt $I = (0)$. Sei nun $I \neq \{0\}$. Wir setzen

$$T := \{\delta(a) \,|\, a \in I \backslash \{0\}\} \subseteq \mathbb{N}_0.$$

T besitzt ein kleinstes Element k, und wir finden $a \in I\backslash\{0\}$ mit $\delta(a) = k$. Es gilt $I = (a)$: sei $b \in I$ beliebig. Dann gibt es $q, r \in R$ mit $b = a\,q + r,\ \delta(r) < \delta(a)$, und es ist $r = b - q\,a \in I$, somit $r = 0$ wegen $\delta(a)$ minimal. Das zeigt $b \in (a)$. $\square$

Entscheidend ist der folgende Satz, der hier nicht bewiesen wird:

Satz 7. *(Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über euklidischen Ringen) Sei R ein euklidischer Ring, M ein endlich erzeugter Modul über R. Dann existieren $k, m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \ldots, p_m \in R$ irreduzibel, $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{N}$, so dass M isomorph ist zu*

$$R^k \oplus R/(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p_m^{e_m}).$$

3 Existenzbeweis

Für $f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in K[X]$ setze

$$f(\phi) := \sum_{i=0}^{d} a_i \phi^i \in \mathrm{End}_K(V),$$

wobei $\phi^0 = \mathrm{id}_V$ die Identität auf V sei. Wie man leicht einsieht, wird V zu einem $K[X]$-Modul, wenn man $\forall\, f \in K[X]$, $v \in V$

$$f \cdot v := (f(\phi))\,(v)$$

definiert. Eingeschränkt auf konstante Polynome erhält man wieder die ursprüngliche Multiplikation $\cdot : K \times V \to V$.
$K[X]$ ist ein euklidischer Ring, und da V als K-Vektorraum endlichdimensional ist, ist V insbesondere als $K[X]$-Modul endlich erzeugt. Wir können also Satz 7 anwenden und erhalten

$$V \cong K[X]^k \oplus K[X]/(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus K[X]/(p_m^{e_m}) =: W \tag{3}$$

als $K[X]$-Modul mit $p_i \in K[X]$ irreduzible Polynome, o.B.d.A. normiert, nicht notwendigerweise alle verschieden; setze $d_i := \deg(p_i) \geq 1$ (wegen p_i irreduzibel). Aufgefasst als K-Vektorräume gilt somit $\dim(W) = \dim(V) < \infty$ und deswegen $k = 0$.
Sei $\psi : W \to V$ ein Isomorphismus; $B = (b_1, \ldots, b_n)$ sei eine Basis von W (als K-Vektorraum) und $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ die Darstellungsmatrix der Multiplikation mit X auf W bezüglich B. Die entscheidende Beweisidee liegt nun darin, dass die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis $\psi(B)$ von V wieder gerade A ist. Für $j = 1, \ldots, n$ ist nämlich

$$\phi(\psi(b_j)) = X \cdot \psi(b_j) \overset{\psi \text{ ist } K[X]\text{-linear}}{=} \psi(X \cdot b_j) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \psi(b_i)$$

Für $i = 1, \ldots, m$ sei B_i eine Basis von $K[X]/(p_i^{e_i})$ (als K-Vektorraum) und A_i die Darstellungsmatrix der Multiplikation mit X. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} B = &B_1 \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \cup \\ &\{0\} \times B_2 \times \{0\} \times \cdots \times \{0\} \cup \\ &\quad\vdots \\ &\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times B_m, \end{aligned}$$

dann hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

Bevor wir B_i konkret angeben, noch folgendes

Lemma 8. *Sei $g \in K[X] \backslash \{0\}$, $d := \deg(g)$, seien $h_0, \ldots, h_{d-1} \in K[X]$ mit $\deg(h_i) = i\ \forall i$. Dann ist $\overline{h_0}, \ldots, \overline{h_{d-1}}$ eine Basis von $K[X]/(g)$ (als K-Vektorraum), insbesondere gilt $\dim(K[X]/(g)) = d$. Hierbei ist $\overline{h} = h + (g)$ für $h \in K[X]$.*

Beweis. Offenbar wird $K[X]/(g)$ erzeugt von $\overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X^{d-1}}$, also $\dim(K[X]/(g)) \leq d$. Noch zu zeigen bleibt, dass $\overline{h_0}, \ldots, \overline{h_{d-1}}$ linear unabhängig sind: sei

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i \,\overline{h_i} = 0,\ a_i \in K.$$

Dann $g \,|\, \sum_{i=0}^{d-1} a_i\, h_i$; aus Gradgründen folgt, dass $\sum_{i=0}^{d-1} a_i\, h_i = 0$ und daraus $a_i = 0\ \forall i$. □

Für $i = 1, \ldots, m$ wählen wir nun $B_i = (b_0, \ldots, b_{e_i \cdot d_i - 1})$ mit

$$b_{j \cdot d_i + k} = \overline{X^k \cdot p_i^j}, \quad j = 0, \ldots, e_i - 1, \quad k = 0, \ldots, d_i - 1$$

Dies ist eine Basis von $K[X]/(p_i^{e_i})$ nach Lemma 8. Für $k \neq d_i - 1$ ist

$$X \cdot b_{j \cdot d_i + k} = \overline{X^{k+1} \cdot p_i^j} = b_{j \cdot d_i + k + 1}$$

und für $k = d_i - 1$:

$$\begin{aligned} X \cdot b_{j \cdot d_i + k} &= \overline{X^{d_i} \cdot p_i^j} = \overline{p_i^{j+1}} - \sum_{s=0}^{d_i - 1} a_s \overline{X^s p_i^j} = \\ &= -\sum_{s=0}^{d_i-1} a_s b_{(j \cdot d_i + k) - d_i + s + 1} + \begin{cases} b_{j \cdot d_i + k + 1} & \text{für } j \neq e_i - 1 \\ 0 & \text{für } j = e_i - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist die Darstellungsmatrix A_i ein verallgemeinertes Jordan-Kästchen gemäß (2) mit genau e_i Begleitmatrizen $L(p_i)$ und A ist allgemeine Normalform.

4 Beweis der Eindeutigkeit

Sei $p \in K[X]$ beliebig. Zu $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ definiere

$$\begin{aligned} r_t(\phi, p) &:= \dim \mathrm{Kern}\left(p^t(\phi)\right),\ t = 0, 1, \ldots \\ c_t(\phi, p) &:= (r_t(\phi, p) - r_{t-1}(\phi, p)) - (r_{t+1}(\phi, p) - r_t(\phi, p)),\ t = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

und völlig analog $r_t(A, p),\ c_t(A, p)$ für $A \in K^{n \times n}$. Ist A eine Darstellungsmatrix von ϕ, dann gilt offenbar $r_t(A, p) = r_t(\phi, p),\ c_t(A, p) = c_t(\phi, p)\ \forall t$, insbesondere sind r_t und c_t unabhängig von der Wahl von A.

Satz 9. *Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Darstellungsmatrix von ϕ in allgemeiner Normalform bezüglich der geordneten Basis B. Für jedes normierte, irreduzible Polynom $p \in K[X]$ und für alle $t \in \mathbb{N}$ ist $\frac{c_t(A,p)}{\deg(p)}$ die Anzahl der verallgemeinerten Jordan-Kästchen zu p in A, in denen genau t Begleitmatrizen auftauchen.*

Beweis. Zunächst bestehe A aus genau einem verallgemeinerten Jordan-Kästchen. Sei $q = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \in K[X]$ das zugehörige normierte, irreduzible Polynom mit Grad d und e die Anzahl der Begleitmatrizen $L(q)$. Wir schreiben $B = (b_0, \ldots, b_{e\cdot d-1})$. Aus der Gestalt von $L(q)$ und A folgt

$$\phi(b_{j\cdot d+k}) = b_{j\cdot d+k+1}, \quad j = 0, \ldots, e-1, \quad k = 0, \ldots, d-2 \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned}\phi(b_{j\cdot d+d-1}) &= -a_0 b_{j\cdot d} - a_1 b_{j\cdot d+1} - \cdots - a_{d-1} b_{j\cdot d+d-1} + b_{(j+1)\cdot d} = \\ &= -a_0 b_{j\cdot d} - a_1 \phi(b_{j\cdot d}) - \cdots - a_{d-1} \phi^{d-1}(b_{j\cdot d}) + b_{(j+1)\cdot d}, \\ &\quad j = 0, \ldots, e-2\end{aligned} \tag{5}$$

sowie

$$\phi(b_{e\cdot d-1}) = -a_0 b_{(e-1)\cdot d} - \cdots - a_{d-1} \phi^{d-1}(b_{(e-1)\cdot d}). \tag{6}$$

Wegen $\phi(b_{j\cdot d+d-1}) = \phi^2(b_{j\cdot d+d-2}) = \cdots = \phi^d(b_{j\cdot d}),\ j = 0, \ldots, e-1$ nach (4) können wir (5) umformen zu $b_{(j+1)\cdot d} = q \cdot b_{j\cdot d},\ j = 0, \ldots, e-2$ und (6) zu $q \cdot b_{(e-1)\cdot d} = 0$. Es ist also

$$B = \left(b_0, X \cdot b_0, \ldots, X^{d-1} \cdot b_0, q \cdot b_0, \ldots, X^{d-1} q^{e-1} \cdot b_0\right),\ q^e \cdot b_0 = 0.$$

Daraus liest man ab:

$$q^t \cdot b_{j\cdot d+k} = \begin{cases} b_{(t+j)\cdot d+k} & \text{für } 0 \le j < e-t \\ 0 & \text{für } e-t \le j < e \end{cases} \quad k = 0, \ldots, d-1,$$

somit $r_t(\phi, q) = d \cdot \min(t, e)$. Es folgt

$$c_t(\phi, q) = d \cdot (2\min(t, e) - \min(t+1, e) - \min(t-1, e)) = d \cdot \delta_{t,e}$$

Sei $g \in K[X]$ ein von q verschiedenes normiertes, irreduzibles Polynom, dann sind g^t, q^e teilerfremd $\forall t \in \mathbb{N}_0$ und es gibt $r, s \in K[X]$ mit $r\, g^t + s\, q^e = 1$. Für alle $b \in B$ gilt

$$b = (r\, g^t + s\, q^e) \cdot b = g^t(r \cdot b),$$

d.h. der Endomorphismus $g^t(\phi)$ ist surjektiv und damit auch bijektiv. Somit $r_t(\phi, g) = 0,\ c_t(\phi, g) = 0\ \forall t$.
Besteht nun A aus mehreren verallgemeinerten Jordan-Kästchen $A_1, \ldots, A_m$, dann kann man die obigen Überlegungen auf die einzelnen Kästchen getrennt anwenden und es gilt $c_t(A, p) = \sum_{i=1}^m c_t(A_i, p)$. □

Weil $c_t(A, p)$ unabhängig von der Wahl der Darstellungsmatrix A von ϕ ist, folgt nun unmittelbar die Eindeutigkeit der allgemeinen Normalform bis auf Vertauschung der Kästchen.

5 Charakteristisches Polynom, Eigenräume und Minimalpolynom

Wir bezeichnen das charakteristische Polynom zu ϕ mit $\chi_\phi(X)$ bzw. das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit $\chi_A(X)$. Ist A eine Darstellungsmatrix von ϕ, dann ist

$$\chi_\phi(X) = \chi_A(X) = \det\left(X \cdot I_n - A\right),$$

unabhängig von der Wahl von A. Bekanntlich sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gerade die Eigenwerte von ϕ bzw. A.

Lemma 10. *Sei $f \in K[X]$ normiert, $\deg(f) \geq 1$. Dann ist $\chi_{L(f)}(X) = f$.*

Beweis. Sei $f = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$. Induktion nach d:
Für $d = 1$ ist $L(f) = (-a_0)$ und $\chi_{L(f)}(X) = X + a_0 = f$.
Schluss von $d-1 \to d$:

$$\chi_{L(f)}(X) = \begin{vmatrix} X & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{d-2} \\ & & -1 & X + a_{d-1} \end{vmatrix} \overset{\text{Entwicklung nach der ersten Zeile}}{=}$$

$$= X \cdot \begin{vmatrix} X & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{d-2} \\ & & -1 & X + a_{d-1} \end{vmatrix} + (-1)^{d-1} a_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & X \\ & & & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{Induktion}}{=} X \cdot \left(X^{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} a_i X^{i-1} \right) + a_0 = f$$

□

Der folgende Satz stellt eine Verbindung her zwischen den theoretisch abgeleiteten Polynomen p_i aus (3) und dem konkret berechenbaren charakteristischen Polynom von ϕ. Zu beachten ist, dass die Polynome $p_1, \ldots, p_m$ im Allgemeinen nicht paarweise verschieden sind.

Satz 11. *Für $p_i, e_i,\ i = 1, \ldots, m$ aus (3) gilt*

$$\chi_\phi(X) = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$$

Beweis. Sei A die im Existenzbeweis konstruierte Darstellungsmatrix. Jedes verallgemeinerte Jordan-Kästchen A_i besteht aus genau e_i Begleitmatrizen $L(p_i)$. Da $X \cdot I_n - A$ eine Block-Diagonalmatrix ist, gilt

$$\chi_\phi(X) = \det(X \cdot I_n - A) = \prod_{i=1}^m \det(X \cdot I_{d_i \cdot e_i} - A_i) \overset{A_i \text{ ist Block-Dreiecksmatrix}}{=}$$

$$= \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{e_i} \det(X \cdot I_{d_i} - L(p_i)) \overset{\text{Lemma 10}}{=} \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$$

□

Die Polynome $p_1, \dots, p_m$ sind eine Verallgemeinerung der Eigenwerte von ϕ: man identifiziere einen Eigenwert λ mit dem irreduziblen Polynom $X - \lambda$.

Für $f \in K[X]$ ist $\operatorname{Kern}(f^t(\phi))$ ein Unterraum von V, und

$$\operatorname{Kern}\left(f^t(\phi)\right) \subseteq \operatorname{Kern}\left(f^{t+1}(\phi)\right) \ \forall t \in \mathbb{N}_0.$$

Da die Dimension jedes Unterraums von V durch n nach oben beschränkt ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\operatorname{Kern}\left(f^k(\phi)\right) = \operatorname{Kern}\left(f^t(\phi)\right) \ \forall t \geq k. \tag{7}$$

Die Suche nach einem minimalen solchen k wird vereinfacht durch folgendes

Lemma 12. *Sei $f \in K[X], k \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:*

- $\operatorname{Kern}\left(f^k(\phi)\right) = \operatorname{Kern}(f^t(\phi)) \ \forall t \geq k$
- $\operatorname{Kern}\left(f^k(\phi)\right) = \operatorname{Kern}\left(f^{k+1}(\phi)\right)$.

Beweis. Nur noch „$\Leftarrow$“ ist zu zeigen. Es ist

$$v \in \operatorname{Kern}\left(f^{k+2}(\phi)\right) \Leftrightarrow f^{k+1}(\phi)\left(f(\phi)(v)\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$f^k(\phi)\left(f(\phi)(v)\right) = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Kern}\left(f^{k+1}(\phi)\right).$$

Anwenden auf $k+1, k+2, \dots$ liefert die Behauptung. □

Definition 13. *Sei $p \in K[X]$ ein irreduzibler Teiler von $\chi_\phi(X)$. Dann heißt*

$$E_p := \operatorname{Kern}(p(\phi))$$

der Eigenraum zu p. Sei $k \in \mathbb{N}$ wie in (7), dann heißt

$$F_p := \operatorname{Kern}\left(p^k(\phi)\right)$$

der Hauptraum zu p. Insbesondere gilt $E_p \subseteq F_p$.

Dies ist eine Verallgemeinerung des Eigen- und Hauptraums eines Eigenwerts λ:

$$E_\lambda = \operatorname{Kern}(\phi - \lambda \operatorname{id}_V) = E_{X-\lambda}, \ F_\lambda = F_{X-\lambda}.$$

Definition 14. *Sei p wie in Definition 13, $d := \deg(p)$. Dann heißt*

$$\mathrm{m_g}(p) := \frac{\dim E_p}{d} = \frac{r_1(\phi, p)}{d}$$

die geometrische Vielfachheit von p. Die algebraische Vielfachheit $\mathrm{m_a}(p)$ ist die Potenz, mit der p in $\chi_\phi(X)$ auftritt; konkret mit der Formel aus Satz 11 ausgedrückt:

$$\mathrm{m_a}(p) := \sum_{\substack{i=1 \\ p_i = p}}^{m} e_i$$

Die geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts λ hängt mit dieser Definition über

$$\mathrm{m_g}(\lambda) = \mathrm{m_g}(X-\lambda),\ \mathrm{m_a}(\lambda) = \mathrm{m_a}(X-\lambda)$$

zusammen.

Um weitere Aussagen mit Hilfe der Isomorphie (3) zu beweisen, folgendes

Lemma 15. *Sei $p \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad d, sei $e \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}_0$.*

- *Ist $q \in K[X]$ teilerfremd zu p, dann ist die Multiplikation mit q^t auf $K[X]/(p^e)$ bijektiv.*
- *Sei mult_{p^t} die Multiplikation mit p^t auf $K[X]/(p^e)$ (als K-Vektorraum). Dann gilt*
$$\dim \mathrm{Kern}\,(\mathrm{mult}_{p^t}) = d \cdot \min(t,e).$$

Beweis. Da q, p teilerfremd, sind auch q^t, p^e teilerfremd, und es gibt $r, s \in K[X]$ mit $r\,q^t + s\,p^e = 1$. Sei nun $\overline{f} \in K[X]/(p^e)$ beliebig:

$$\overline{f} = (r\,q^t + s\,p^e)\cdot \overline{f} = q^t \cdot \overline{r\,f}.$$

Die Multiplikation mit q^t ist also surjektiv und damit auch bijektiv (da sie ein Endomorphismus ist).
Die zweite Aussage ist klar für $t \geq e$; sei ab jetzt $t < e$. Definiere eine lineare Abbildung

$$\xi : K[X]/(p^t) \to \mathrm{Kern}\,(\mathrm{mult}_{p^t})\,, f + (p^t) \mapsto p^{e-t} f + (p^e).$$

Wir zeigen: ξ ist bijektiv:
Injektivität: sei $f + (p^t) \in \mathrm{Kern}\,(\xi)$. Dann $p^e \mid p^{e-t} f \Rightarrow p^t \mid f$, somit $f + (p^t) = 0$.
Surjektivität: sei $f + (p^e) \in \mathrm{Kern}\,(\mathrm{mult}_{p^t})$. Wegen $p^e \mid p^t f, p^{e-t} \mid f$ ist $f = p^{e-t} g$ für ein $g \in K[X]$, und es gilt $\xi(g + (p^t)) = f$.
Da $\dim(K[X]/(p^t)) = d \cdot t$ (als K-Vektorraum) folgt die zweite Behauptung. □

Satz 16. *Seien p und d wie in Definition 14. Dann ist $\mathrm{m_g}(p)$ die Anzahl der Polynome p in (3):*

$$\mathrm{m_g}(p) = \sum_{\substack{i=1\\ p_i = p}}^{m} 1.$$

Nach Konstruktion der allgemeinen Jordanbasis im Existenzbeweis ist also die geometrische Vielfachheit gerade die Anzahl der verallgemeinerten Jordankästchen (unabhängig von der Anzahl der Begleitmatrizen) zu p.

Beweis. Wir nutzen die Isomorphie (3) aus: $\dim \mathrm{Kern}\,(\mathrm{mult}_p) = d \cdot \mathrm{m_g}(p)$, wobei mult_p die Multiplikation mit p auf W bezeichne. mult_p wirkt unabhängig auf die einzelnen Summanden von W, so dass nach Lemma 15 gilt:

$$\dim \mathrm{Kern}\,(\mathrm{mult}_p) = \sum_{\substack{i=1\\ p_i = p}}^{m} d \cdot \min(1, e_i) = d \cdot \sum_{\substack{i=1\\ p_i = p}}^{m} 1.$$

□

Satz 17. *Seien p und d wie in Definition 14. Dann gilt*

$$\mathrm{m_a}(p) = \frac{\dim F_p}{d}$$

Beweis. Wir verwenden die Isomorphie (3) und Lemma 15:

$$\dim F_p = \sum_{\substack{i=1 \\ p_i = p}}^{m} \dim K[X]/(p_i^{e_i}) = d \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ p_i = p}}^{m} e_i = d \cdot \mathrm{m_a}(p).$$

$\square$

Gemäß der Basiskonstruktion im Existenzbeweis ist $\mathrm{m_a}(p)$ außerdem gleich der Gesamtanzahl von Begleitmatrizen zu p in der allgemeinen Normalform von ϕ.

Lemma 18. *Seien $f, g \in K[X]$ teilerfremd. Dann gilt:*

$$\mathrm{Kern}\,(f(\phi)) \cap \mathrm{Kern}\,(g(\phi)) = \{0\}$$

Beweis. Wegen f, g teilerfremd gibt es $r, s \in K[X]$ mit $r\,f + s\,g = 1$. Sei nun $v \in \mathrm{Kern}\,(f(\phi)) \cap \mathrm{Kern}\,(g(\phi))$:

$$v = (r\,f + s\,g) \cdot v = r\,(f \cdot v) + s\,(g \cdot v) = 0$$

$\square$

Lemma 19. *Seien $f_1, \ldots, f_r \in K[X]$ paarweise teilerfremde Polynome ($r \in \mathbb{N}$). Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Kern}\,(f_i(\phi)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Kern}\,(f_i(\phi))$$

Beweis. Induktion nach r: nichts zu zeigen für $r = 1$.
Schluss von $r \to r+1$: sei $\sum_{i=1}^{r+1} v_i = 0$, $v_i \in \mathrm{Kern}\,(f_i(\phi))$. Dann gilt insbesondere

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_r) \cdot \left(\sum_{i=1}^{r+1} v_i \right) = 0;$$

daraus folgt

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_r) \cdot v_{r+1} = 0.$$

Es sind $f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$ und f_{r+1} teilerfremd; nach Lemma 18 ist also

$$\mathrm{Kern}\,((f_1 \cdot f_2 \cdots f_r)\,(\phi)) \cap \mathrm{Kern}\,(f_{r+1}(\phi)) = \{0\}$$

und somit $v_{r+1} = 0$. Per Induktion folgt, dass auch $v_1 = \cdots = v_r = 0$. $\square$

Korollar 20. *Die Summe der Eigenräume ist direkt. Konkret: seien $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_r$ die paarweise verschiedenen Polynome in (3). Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{r} E_{\tilde{p}_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\tilde{p}_i}.$$

Beweis. Da die Polynome $\tilde{p}_i$ irreduzibel und normiert sind, sind sie paarweise teilerfremd. Die Behauptung folgt mit Lemma 19. $\square$

Korollar 21. *V ist die direkte Summe der Haupträume: seien $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_r$ wie in Korollar 20. Es gilt*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} F_{\tilde{p}_i}.$$

Beweis. Nach Definition des Hauptraums gibt es $k_i \in \mathbb{N}$ mit $F_{\tilde{p}_i} = \operatorname{Kern}\left(\tilde{p}_i^{k_i}(\phi)\right)$, $i = 1, \dots, r$. Da $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_r$ paarweise teilerfremd sind, sind auch $\tilde{p}_1^{k_1}, \dots, \tilde{p}_r^{k_r}$ paarweise teilerfremd; mit Lemma 19 folgt

$$\sum_{i=1}^{r} F_{\tilde{p}_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} F_{\tilde{p}_i}.$$

Wir benutzen wieder die Isomorphie (3): wegen

$$\dim F_{\tilde{p}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ p_j = \tilde{p}_i}}^{m} e_j$$

ist

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{r} F_{\tilde{p}_i} = \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot e_i = \dim V,$$

was die Aussage beweist. $\square$

Satz 22. *(Caley-Hamilton)*
Es ist

$$\chi_\phi(\phi) = 0.$$

Beweis. Nach Satz 11 ist $\chi_\phi(X) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$ mit p_i, e_i aus (3). Da die Multiplikation mit $p_i^{e_i}$ auf $K[X]/(p_i^{e_i})$ die Nullabbildung ist, gilt $\forall v \in V$:

$$\prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i} \cdot v = 0.$$

$\square$

Wir setzen

$$G := \{ g \in K[X] \,|\, g(\phi) = 0 \}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass G ein Ideal in $K[X]$ ist, und es ist $\chi_\phi(X) \in G$. Nach Satz 6 gibt es $g_0 \in K[X] \backslash \{0\}$ mit $G = \{ f \cdot g_0 \,|\, f \in K[X] \}$.

Definition 23. *Das (eindeutig bestimmte) normierte Polynom $g_0 \in K[X] \backslash \{0\}$ von minimalem Grad mit $g_0(\phi) = 0$ heißt Minimalpolynom von ϕ.*

Wegen $\chi_\phi(X) \in G$ gilt $g_0 \,|\, \chi_\phi(X)$.

Satz 24. *Seien $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_r$ die paarweise verschiedenen Polynome in (3) und*

$$e_{\max,i} := \max_{p_j = \tilde{p}_i} e_j, \quad i = 1, \dots, r$$

mit p_j, e_j aus (3), $j = 1, \dots, m$. Dann gilt

$$g_0 = \prod_{i=1}^{r} \tilde{p}_i^{e_{\max,i}} =: h.$$

Beweis. Wir zeigen $g_0 \,|\, h$ und $h \,|\, g_0$. Da beide Polynome normiert sind, folgt die Gleichheit. Aus der Isomorphie (3) und der Definition von $e_{\max,i}$ schließt man $h \cdot v = 0 \; \forall v \in V$, also $h \in G$ und somit $g_0 \,|\, h$. Die Multiplikation mit g_0 auf $K[X]/(p_i^{e_i})$ muss die Nullabbildung sein für alle $i = 1, \dots, m$, also wegen Lemma 15: $p_i^{e_i} \,|\, g_0$, und insgesamt $h \,|\, g_0$. $\square$

Daraus folgt insbesondere, dass die Eigenwerte gerade die Nullstellen von g_0 sind.

Wir stellen noch eine Verbindung zur Diagonalisierbarkeit her:

Korollar 25. *Seien $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von ϕ und g_0 das Minimalpolynom. Dann gilt*

$$\phi \text{ diagonalisierbar} \Leftrightarrow g_0 = \prod_{i=1}^{r} \left(X - \tilde{\lambda}_i \right).$$

Beweis. Jede Darstellungsmatrix in Diagonalgestalt ist insbesondere in allgemeiner Normalform. Wegen der Eindeutigkeit der ANF gilt somit: ϕ diagonalisierbar $\Leftrightarrow \deg(p_i) = 1, \; e_i = 1 \; \forall i = 1, \dots, m$ in (3) $\Leftrightarrow \tilde{p}_i = X - \tilde{\lambda}_i$ (nach Umordnen) und $e_{\max,i} = 1 \; \forall i = 1, \dots, r$ in Satz 24 $\Leftrightarrow g_0 = \prod_{i=1}^{r} \left(X - \tilde{\lambda}_i \right)$. $\square$

6 Jordansche Normalform

Wir betrachten den Spezialfall, dass alle Polynome $p_1, \dots, p_m$ den minimalen Grad 1 in Satz und Definition 2 haben, also $p_i = X - \lambda_i, \; \lambda_i \in K, \; i = 1, \dots, m$. Dann vereinfacht sich $L(p_i)$ zu (λ_i). Dies motiviert folgende

Definition 26. *(Jordansche Normalform)*
Sei $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und A eine Darstellungsmatrix von ϕ. Ist

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{e_i \times e_i}, \; \lambda_i \in K, \; i = 1, \dots, m \tag{9}$$

dann heißt A Jordansche Normalform (JNF) zu ϕ. Die Matrizen J_i heißen Jordan-Kästchen.

Man beachte, dass eine solche Darstellungsmatrix nicht unbedingt existieren muss. Die λ_i sind gerade die Eigenwerte von ϕ, denn es ist

$$\chi_\phi(X) = \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{e_i}.$$

Da die Jordansche Normalform insbesondere allgemeine Normalform ist, überträgt sich die Eindeutigkeit (bis auf Vertauschung der Kästchen).

Satz 27. *ϕ besitzt Jordansche Normalform $\Leftrightarrow$ $\chi_\phi(X)$ zerfällt in Linearfaktoren; in diesem Fall ist die allgemeine Normalform in Jordanscher Normalform.*

Beweis.
„$\Rightarrow$" Direkt aus der Anmerkung zu Definition 26.
„$\Leftarrow$" Das charakteristische Polynom $\chi_\phi(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Aus Satz 11 folgt, dass alle irreduziblen Polynome $p_1, \ldots, p_m$ linear sind, also ist die allgemeinen Normalform von ϕ in Jordanscher Normalform. □

Das charakteristische Polynom zerfällt stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper!

Satz 28. *Ist ϕ diagonalisierbar, dann besitzt ϕ Jordansche Normalform, und diese ist eine Diagonalmatrix.*

Beweis. Sei ϕ diagonalisierbar. Dann zerfällt $\chi_\phi(X)$ in Linearfaktoren; die erste Behauptung folgt somit aus Satz 27. Es gibt eine Darstellungsmatrix A von ϕ in Diagonalgestalt. Da A insbesondere in Jordanscher Normalform ist, ergibt sich die zweite Behauptung aus der Eindeutigkeit der JNF. □

Nach Satz 27 und 28 ist die allgemeine Normalform genau dann in Jordanscher Normalform, wenn diese existiert, und die allgemeine Normalform bzw. Jordansche Normalform ist genau dann eine Diagonalmatrix, wenn ϕ diagonalisierbar ist.

7 Algorithmus zum Bestimmen einer verallgemeinerten Jordanbasis

Wir setzen voraus, dass das charakteristische Polynom faktorisiert werden kann. Der Algorithmus lautet:

- Setze $B := \emptyset$.
- $E :=$ Menge der irreduziblen, normierten Teiler von $\chi_\phi(X)$. Für jedes Polynom $p \in E$ ($d := \deg(p)$):
  - Für $e = 1, 2, \ldots$ bestimme Basis B_e von Kern $(p^e(\phi))$ und setze $D_e := \emptyset$, bis $|B_e| = |B_{e+1}|$. $e_{\max} := e$.
  - Für $e = e_{\max}, \ldots, 1$:

  · $z := \frac{c_e(\phi,p)}{d}$ Anzahl der verallgemeinerten Jordan-Kästchen zu p mit genau e Begleitmatrizen
  · Für $i = 1, \ldots, z$:
    – Wähle Vektor $b_i \in B_e$, so dass

$$B_{e-1} \cup D_e \cup \{b_i\}$$

    linear unabhängig sind.
    – Für $j = e, \ldots, 1$ (e Begleitmatrizen im verallgemeinerten Jordankästchen):
      * Für $k = 0, \ldots, d-1$ („Erzeuge“ Begleitmatrix):
        · $B := B \cup \{X^k \cdot b_i\}$
        · $D_j := D_j \cup \{X^k \cdot b_i\}$
      * $b_i := p \cdot b_i$ (nächste Begleitmatrix)

- $S \in GL_n(K)$ mit Vektoren aus B als Spalten ist Basiswechselmatrix.

Der Algorithmus füllt B mit den Basisvektoren an, und D_e „speichert“ die bisher gefundenen Basisvektoren in $\text{Kern}\,(p^e(\phi)) \setminus \text{Kern}\,\left(p^{e-1}(\phi)\right)$, um die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zu garantieren. $e_{\max}$ ist die maximale Anzahl von Begleitmatrizen in Jordan-Kästchen zu p (siehe unten). Wegen $r_e(\phi, p) = \left|B_e\right|$ kann $c_e(\phi, p)$ leicht berechnet werden.

Beispiel: Sei $K = \mathbb{R}$ und ϕ durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis gegeben. Man berechnet

$$\chi_\phi(X) = (X^2+1)(X-2)^2,$$

also $E = \{X^2+1, X-2\}$. Daraus kann man bereits ablesen, dass die allgemeine Normalform aus genau einem verallgemeinerten Jordan-Kästchen zu X^2+1 mit einer Begleitmatrix besteht und aus einem Kästchen mit zwei Begleitmatrizen zu $X-2$ oder aus zwei Kästchen mit je einer Begleitmatrix.
$p = X^2 + 1$:

$$p(A) = A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -9 & 13 & 10 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

B_1 ist eine Basis des Kerns dieser Matrix, etwa

$$B_1 := \left\{(1,0,2,-2)^T, (3,-2,0,0)^T\right\}.$$

Man berechnet noch eine Basis B_2 von $p(A)^2$. Es ergibt sich $r_0(\phi, X^2+1) = 0$, $r_1(\phi, X^2+1) = \left|B_1\right| = 2$, $r_2(\phi, X^2+1) = \left|B_2\right| = 2$. Wie erwartet $e_{\max} = 1$

und $z = 1$. Wir wählen willkürlich $b_1 = (1,0,2,-2)^T \in B_1$ und fügen die ersten Basisvektoren zu B hinzu:

$$B := (b_1, X \cdot b_1) = \left((1,0,2,-2)^T, (2,-1,1,-1)^T\right).$$

$p = X - 2$:
Die Begleitmatrix ist eine 1×1 Matrix: $L(X-2) = (2)$.

$$p(A) = A - 2 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wieder wählen wir eine Basis des Kerns dieser Matrix:

$$B_1 := \left\{(1,0,2,-1)^T\right\}.$$

Damit haben wir $r_1(\phi, X-2) = \left|B_1\right| = 1$. Wir bestimmen B_2:

$$p^2(A) = (A - 2 \cdot I_4)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 0 & -4 \\ -2 & -13 & 0 & -2 \\ 2 & 13 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 := \left\{(1,0,2,-1)^T, (0,0,1,0)^T\right\}.$$

$r_2(\phi, X-2) = \left|B_2\right| = 2$. Da wir bereits eine Basis von Kern $\left((X^2+1)(\phi)\right)$ mit 2 Elementen gefunden haben, muss B_3 genau 2 Vektoren enthalten, d.h. $r_3(\phi, X-2) = 2$. Somit $e_{\max} = 2$, $c_1(\phi, X-2) = 2r_1(\phi, X-2) - r_2(\phi, X-2) - r_0(\phi, X-2) = 0$, d.h. es gibt kein Kästchen mit genau einer Begleitmatrix und wir schließen, dass die allgemeine Normalform ein Kästchen mit zwei Begleitmatrizen zu $X-2$ haben muss. (Alternativ kommt man mit $\mathrm{m_g}(2) = \frac{r_1(\phi, X-2)}{\deg(X-2)} = 1$ und Satz 16 zum gleichen Ergebis.) Wählt man $b_1 = (0,0,1,0)^T \in B_2$, dann ist $B_1 \cup \{b_1\}$ linear unabhängig, und wir erweitern B dem Algorithmus folgend:

$$B := B \cup (b_1, p \cdot b_1) = \left((1,0,2,-2)^T, (2,-1,1,-1)^T, (0,0,1,0)^T, (1,0,2,-1)^T\right).$$

Die Basiswechselmatrix S enthält diese Vektoren als Spalten:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nachrechnen bestätigt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass der Algorithmus die Jordansche Normalform liefert, falls sie existiert, bzw. eine Diagonalmatrix, falls ϕ diagonalisierbar ist.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass der Algorithmus tatsächlich funktioniert.

Proposition 29. *Es gibt ein $e \in \mathbb{N}$ mit $|B_e| = |B_{e+1}|$, und $e_{\max}$ ist die maximale Anzahl von Begleitmatrizen in Jordan-Kästchen zu p.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Vorbemerkung zu Lemma 12. Aus der Isomorphie (3) liest man ab, dass $e_{\max} = \max_{p_i = p} e_i$. Dies ist nach Konstruktion der Basis im Existenzbeweis gerade die maximale Anzahl von Begleitmatrizen in Jordan-Kästchen zu p. □

Proposition 30. *Es lässt sich stets ein Vektor $b_i \in B_e$ finden, so dass $B_{e-1} \cup D_e \cup \{b_i\}$ linear unabhängig sind, und nach Durchführen des Algorithmus ist $D_e \cup B_{e-1}$ linear unabhängig $\forall\, e = 1, \dots, e_{\max}$.*

Beweis. Ist $B_{e-1} \cup D_e$ linear unabhängig, so folgt die Existenz eines solchen Vektors b_i aus Dimensionsgründen und der Existenz einer verallgemeinerten Jordanbasis. Es reicht also noch zu zeigen: sind $b_1, \dots, b_z, b_{z+1} \in \operatorname{Kern}(p^e(\phi))$, so dass

$$\{b_1, X \cdot b_1, \dots, X^{d-1} \cdot b_1, \dots, X^{d-1} \cdot b_z, b_{z+1}\} \cup B_{e-1} \tag{10}$$

linear unabhängig ist, dann ist auch

$$\{b_1, X \cdot b_1, \dots, X^{d-1} \cdot b_1, \dots, X^{d-1} \cdot b_z, b_{z+1}, X \cdot b_{z+1}, \dots, X^{d-1} \cdot b_{z+1}\} \cup B_{e-1}$$

linear unabhängig. Sei also

$$\sum_{i=1}^{z+1} \sum_{j=0}^{d-1} a_{ij} X^j \cdot b_i \in \operatorname{Kern}\left(p^{e-1}(\phi)\right), \quad a_{ij} \in K.$$

Zu zeigen: $a_{ij} = 0\ \forall i, j$. Wir setzen $q_i = \sum_{j=0}^{d-1} a_{ij} X^j \in K[X]$ für $i = 1, \dots, z+1$; es gilt

$$p^{e-1} \cdot \sum_{i=1}^{z+1} q_i \cdot b_i = 0. \tag{11}$$

Angenommen, $q_{z+1} \neq 0$. Dann sind q_{z+1}, p teilerfremd und wir finden $r, s \in K[X]$ mit $r\, q_{z+1} + s\, p = 1$. Dies in (11) eingesetzt liefert (wegen $p^{e-1}(s\, p \cdot b_{z+1}) = 0$):

$$p^{e-1} \left(b_{z+1} + \sum_{i=1}^{z} r\, q_i \cdot b_i \right) = 0.$$

Division mit Rest: $r\, q_i = g_i\, p + \tilde{q}_i,\ g_i, \tilde{q}_i \in K[X],\ \deg(\tilde{q}_i) < d,\ i = 1, \dots, z$. Da $p^{e-1}(g_i\, p \cdot b_i) = 0$ folgt

$$p^{e-1} \left(b_{z+1} + \sum_{i=1}^{z} \tilde{q}_i \cdot b_i \right) = 0,$$

ein Widerspruch zu (10). Also war die Annahme falsch und es ist $q_{z+1} = 0$. Aus (10) folgt nun, dass auch $q_1 = \dots = q_z = 0$. □

Proposition 31. *Nach Durchführen des Algorithmus ist für alle $p \in E$*

$$D_1 \cup \dots \cup D_{e_{\max}}$$

linear unabhängig.

Beweis. Sei etwa $D_e = \{b_{e,1}, \dots, b_{e,z_e}\}$. Gilt

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} \sum_{i=1}^{z_e} a_{e,i} b_{e,i} = 0, \quad a_{e,i} \in K,$$

dann folgt wegen $D_{e_{\max}} \cup B_{e_{\max}-1}$ linear unabhängig (nach Proposition 30) und $\sum_{e=1}^{e_{\max}-1} \sum_{i=1}^{z_e} a_{e,i} b_{e,i} \in \operatorname{Kern}\left(p^{e_{max}-1}(\phi)\right)$, dass

$$a_{e_{\max},1} = \cdots = a_{e_{\max},z_{e_{\max}}} = 0.$$

Analog folgert man $a_{e_{\max}-1,1} = \cdots = a_{e_{\max}-1,z_{e_{\max}-1}} = 0$ usw. □

Damit ist bewiesen, dass die Basisvektoren zu einem Polynom $p \in E$ linear unabhängig sind.

Proposition 32. *Nach Durchführen des Algorithmus sind die Vektoren in B linear unabhängig.*

Beweis. Sei $E = \{p_1, \dots, p_r\}$. Nach Konstruktion von B gibt es $e_{\max,1}, \dots, e_{\max,r} \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Vektor $b \in B$ ein $i \in \{0, \dots, r\}$ existiert mit $p_i^{e_{\max,i}} \cdot b = 0$. Es reicht, noch

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{Kern}\left(p_i^{e_{\max,i}}(\phi)\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Kern}\left(p_i^{e_{\max,i}}(\phi)\right) \tag{12}$$

zu zeigen. Die Polynome $p_1, \dots, p_r$ sind irreduzibel und deswegen paarweise teilerfremd. Somit sind auch $p_1^{e_{\max,1}}, \dots, p_r^{e_{\max,r}}$ paarweise teilerfremd und (12) folgt aus Lemma 19. □

Proposition 33. *B ist eine verallgemeinerte Jordanbasis.*

Beweis. Gemäß Konstruktion enthält B genau so viele Vektoren wie eine verallgemeinerte Jordanbasis und ist deswegen selbst eine Basis. Durch die Wahl der Vektoren ist die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich B in allgemeiner Normalform. □

8 Implementierung in Maple

Über $\mathbb{C}$ ist die allgemeine Normalform stets gleich der Jordanschen Normalform und kann mit einer Bibliotheksfunktion der verwendeten Maple-Version (Maple 9 unter Windows XP, AMD Athlon XP 2600+ (1.92 GHz), 512 MB RAM) berechnet werden; allerdings stehen dann die Einsen in den Jordankästchen per Konvention über der Diagonale. Die hier angegebene Funktion „GeneralizedJordan“ bestimmt eine verallgemeinerte Jordanbasis über $\mathbb{R}$ und verwendet das Paket „LinearAlgebra“ zum Umgang mit Matrizen.

```
# construct a generalized Jordan basis;
# return value 'S' is base change matrix, ie S^(-1) * A * S has generalized >>
jordan form
GeneralizedJordan := proc(A::Matrix)
local i, j, k, n, charPoly, E, p, D, e, B, c, e_max, b, S;
    n := RowDimension(A);
    S := Matrix(n, 0);
```

```
    # find irreducible polynomials in charateristic polynomial
    charPoly := factor(CharacteristicPolynomial(A, 'X'));
    if type(charPoly, `+`) then
        if degree(charPoly) > 2 then error "factorization of characteristic >>
polynomial failed" end if;
        E := {charPoly};
    elif type(charPoly, `^`) then
        E := {op(1, charPoly)};
    else
        E := {seq(`if`(type(op(i, charPoly), `^`), op(1, op(i, charPoly)), >>
op(i, charPoly)), i=1..nops(charPoly))};
    end if;

    for p in E do
        B[0] := NullSpace(IdentityMatrix(n));
        B[1] := NullSpace(subs(X=A, p));
        B[2] := NullSpace(subs(X=A, p^2));
        e := 1;
        while nops(B[e]) <> nops(B[e-1]) do # while we haven't reached e_max+1
            D[e] := {};
            c[e] := 2*nops(B[e]) - nops(B[e-1]) - nops(B[e+1]);
            e := e+1;
            B[e+1] := NullSpace(subs(X=A, p^(e+1)));
        end do;
        e_max := e-1;

        for e from e_max to 1 by -1 do
            for i from 1 to c[e]/degree(p) do
                for b in B[e] do
                    if nops(Basis(B[e-1] union D[e] union {b})) = >>
nops(B[e-1])+nops(D[e])+1 then break; end if;
                end do;
                for j from e to 1 by -1 do
                    for k from 0 to degree(p)-1 do
                        S := Matrix([S, Multiply(A^k, b)]);
                        D[j] := D[j] union {Multiply(A^k, b)};
                    end do;
                    b := Multiply(subs(X=A, p), b);
                end do;
            end do;
        end do;
    end do;
    S;
end proc:
```

Zur Demonstration die Beispielmatrix von oben:

```
A := Matrix([[0, 2, 1, 0], [1, 1, 0, 1], [-1, 1, 4, 3], [-1, -4, -1, -1]]);
factor(CharacteristicPolynomial(A, 'X'));
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(X^2+1\right)(X-2)^2$$

```
S := GeneralizedJordan(A);
eval(Multiply(S^(-1), Multiply(A, S)));
```

$$S := \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & -1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Aufruf `GeneralizedJordan(A)` benötigt etwa 0.2 s.

Die Funktion liefert die Jordansche Normalform, falls sie existiert:

```
A := Matrix([[4, 0, 0, -1, 0, 0], [1, 4, 0, 1, 0, 0], [6, 1, 4, -4, -1, -2],
[0, 0, 0, 3, 0, 0], [8, 1, 3, -5, 0, -6], [-4, -1, -1, 2, 1, 5]]);
factor(CharacteristicPolynomial(A, 'X'));
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & -5 & 0 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(X-4)^2(X-3)^4$$

```
S := GeneralizedJordan(A):
eval(Multiply(S^(-1), Multiply(A, S)));
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9 Zusammenhang zwischen JNF über $\mathbb{C}$ und ANF über $\mathbb{R}$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in allgemeiner Normalform und $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ durch A gegeben. A definiert auch einen Endomorphismus $\phi' \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Wir wollen untersuchen, wie sich die Jordansche Normalform A' von ϕ' aus A ablesen lässt.

Sei $f = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Dann ist auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle, denn

$$f(\overline{\lambda}) = \sum_{i=0}^d a_i \overline{\lambda}^i \overset{a_i\in\mathbb{R}}{=} \overline{\sum_{i=0}^d a_i \lambda^i} = \overline{0} = 0.$$

Über $\mathbb{R}$ haben die irreduziblen Polynome höchstens Grad 2. Ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein irreduzibles, normiertes Polynom vom Grad 2, dann besitzt p eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, und es ist auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle. Also

$$p = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X - (\lambda+\overline{\lambda})X + |\lambda|^2.$$

Die zugehörige Begleitmatrix ist

$$L(p) = \begin{pmatrix} 0 & -|\lambda|^2 \\ 1 & \lambda + \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Korollar 34. *Beim Übergang von A nach A' wird ein verallgemeinertes Jordan-Kästchen zu p mit e Begleitmatrizen*

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} 0 & -|\lambda|^2 & & & & \\ 1 & \lambda + \overline{\lambda} & & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & -|\lambda|^2 \\ & & & & 1 & \lambda + \overline{\lambda} \end{array}}$$

ersetzt durch ein Jordankästchen zu λ und ein Jordankästchen zu $\overline{\lambda}$, jeweils mit Länge e:

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cccc} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{array}} & \\ & \boxed{\begin{array}{cccc} \overline{\lambda} & & & \\ 1 & \overline{\lambda} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \overline{\lambda} \end{array}} \end{array}$$

Die Jordan-Kästchen in A zu den irreduziblen Polynomen von Grad 1 *bleiben gleich.*

Zum Beweis werden wir folgende, durch den Chinesischen Restsatz begründete Isomorphie ausnutzen:

$$\mathbb{C}[X]/(p^e) \cong \mathbb{C}[X]/((X-\lambda)^e) \oplus \mathbb{C}[X]/((X-\overline{\lambda})^e), \; e \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Für $f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ setzen wir

$$\operatorname{Re} f := \sum_{i=0}^{d} \operatorname{Re}(a_i) X^i,$$
$$\operatorname{Im} f := \sum_{i=0}^{d} \operatorname{Im}(a_i) X^i.$$

Sei nun allgemein $p \in \mathbb{R}[X]$ ein über $\mathbb{R}$ irreduzibles Polynom, $e \in \mathbb{N}$ und $f + (p^e) \in \mathbb{C}[X]/(p^e)$. Dann ist

$$\operatorname{Re}(f + (p^e)) := \operatorname{Re}(f) + (p^e),$$
$$\operatorname{Im}(f + (p^e)) := \operatorname{Im}(f) + (p^e)$$

wohldefiniert, denn sei $g + (p^e) \in \mathbb{C}[X]/(p^e)$ mit $f + (p^e) = g + (p^e)$, also $f - g = h \cdot p$ für ein $h \in \mathbb{C}[X]$. Aus

$$\operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(g) = \operatorname{Re}(f-g) = \operatorname{Re}(h \cdot p) \overset{p \in \mathbb{R}[X]}{=} \operatorname{Re}(h) \cdot p$$

folgt $\operatorname{Re}(f) + (p^e) = \operatorname{Re}(g) + (p^e)$. Die Wohldefiniertheit von $\operatorname{Im}(f + (p^e))$ völlig analog.

$\mathbb{R}^n$ wird durch ϕ zu einem $\mathbb{R}[X]$-Modul; als Spezialfall von (3) haben wir

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}[X]/(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}[X]/(p_m^{e_m}) =: W.$$

Sei wieder $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. $\mathbb{C}^n$ wird durch ϕ' zu einem $\mathbb{C}[X]$-Modul und ist isomorph zu

$$W_0' := \mathbb{C}[X]/(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[X]/(p_m^{e_m}),$$

denn es ist

$$\psi' : W_0' \to \mathbb{C}^n,\ w \mapsto \psi(\operatorname{Re} w) + i\psi(\operatorname{Im} w)$$

eine $\mathbb{C}[X]$-lineare, injektive Abbildung und damit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus; hierbei gilt $\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w$ komponentenweise. (ψ' ist offenbar additiv, und $\forall r \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $\psi'(rw) = r\psi'(w)$; $\psi'(iw) = \psi(\operatorname{Re}(iw)) + i\psi(\operatorname{Im}(iw)) = -\psi(\operatorname{Im} w) + i\psi(\operatorname{Re} w) = i\psi'(w)$, also wegen der Additivität $\psi'(cw) = c\psi'(w) \forall c \in \mathbb{C}$. Weiter $\psi'(X \cdot w) = X \cdot \psi'(w)$, da ϕ $\mathbb{R}[X]$-linear. Insgesamt folgt die Linearität. Die Injektivität ist klar wegen ψ isomorph.)

Für jedes Polynom p_i mit Grad 2 ersetzen wir $\mathbb{C}[X]/(p_i^{e_i})$ in W_0' mit Hilfe von (13) und erhalten einen zu W_0' isomorphen $\mathbb{C}[X]$-Modul W'. Somit auch $\mathbb{C}^n \cong W'$, und wie im Existenzbeweis können wir eine Jordanbasis konstruieren. Aus der Gestalt von W' folgt Korollar 34.

Wegen der Eindeutigkeit von allgemeiner und Jordanscher Normalform lässt sich umgekehrt auch aus der Jordanschen Normalform einer Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ über $\mathbb{C}$ auf die allgemeine Normalform über $\mathbb{R}$ schließen.