PERSONAL - Analysis für Informatik

- Operationen mit Potenzreihen
- Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

Mengenlehre (DS)

- grundlegende Informationen hier
- **Teilmengendefinition**: $B \subseteq A \iff \forall x \in B : x \in A$ (B heißt Teilmenge von A, wenn alle x in B auch in A sind)
- **Injektion, Surjektion, Bijektion** für $f : A \to B$:
  - **Injektion**: $\forall x, y \in A, x \neq y : f(x) \neq f(y)$ (für jedes $y \in B$ gibt es *höchstens ein Urbild*)
    - **anders**: aus $f(x) = f(y)$ folgt stets $x = y$
  - **Surjektion**: $\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$ (für jedes $y \in B$ gibt es *mindestens ein Urbild*)
  - **Bijektion**: f ist injektiv und surjektiv (für jedes $y \in B$ gibt es *genau ein Urbild*)
- **Kardinalitäten**:
  - $|A| \leq |B| \iff \exists$ Injektion $f : A \to B$
  - $|A| = |B| \iff \exists$ Bijektion $f : A \to B$
  - $|A| < |B| \iff \exists$ Injektion $f : A \to B$ aber **keine** Injektion $g : B \to A$
- **Auswahlaxiom**: $\exists$ Surjektion $f : A \to B \iff \exists$ Injektion $g : B \to A$ (eine Surjektion von A in B existiert genau dann, wenn eine Injektion von B in A existiert)
- **Satz von Cantor**: sind $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv, dann ist $h : A \to B$ **bijektiv** ($|A| = |B|$)
- **abzählbar unendliche Mengen**: eine Menge A heißt abzählbar unendlich, wenn $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (alef null)
  - m.a.W: $\exists$ Bijektion zwischen A und $\mathbb{N}$
  - *Beispiele*: $|\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^2| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, aber $|\mathbb{R}| > \aleph_0$ (siehe Cantors zweites Diagonalargument)
- **REZEPT - Zeige, dass eine Menge abzählbar / überabzählbar ist**:
  - **abzählbar**: Elemente explizit auflisten, Bijektion mit $\mathbb{N}$ aufstellen, Vereinigung mehrerer abzählbarer Mengen
  - **überabzählbar**: Diagonalargument, überabzählbare Menge (z.B. $[0,1] \subset M$) in Obermenge M enthalten

Reele Zahlen und Vektoren (LinAlg)

- grundlegende Informationen hier

(Angeordnete) Körper

- **Körper**: ein Ring $(K, +, \cdot)$ mit Einselement 1 heißt Körper, falls folgendes gilt:
  - $(K, +)$ **abelsche Gruppe** (neutrales Element 0)
    - Abgeschlossenheit: $K \times K \to K$
    - Assoziativität: $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$
    - neutrales Element: $\exists 0 \in K \; \forall a \in K : 0 + x = x = x + 0$
    - Inverses: $\forall a \in K \; \exists b \in K : a + b = 0 = b + a$ (eindeutig)
    - Kommutativität: $\forall a, b \in K : a + b = b + a$
  - $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ **abelsche Gruppe** (neutrales Element 1)
    - Abgeschlossenheit: $K \times K \to K$
    - Assoziativität: $\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
    - neutrales Element: $\exists 1 \in K \; \forall a \in K : 1 \cdot x = x = x \cdot 1$
    - Inverses: $\forall a \in K \; \exists b \in K : a \cdot b = 1 = b \cdot a$ (eindeutig)
    - Kommutativität: $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$
  - **Distributivgesetze**, $\forall a, b, c \in K$:
    - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
    - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- **angeordnete Körper**: ein Körper K, auf dem eine **Totalordnung** $\leq$ definiert ist, so dass...
  - $\forall a \in K : a > 0$ oder $a < 0$ oder $a = 0$ (*genau eins* darf gelten)
  - $\forall a, b \in K : a, b > 0 \implies a + b, a \cdot b > 0$
  - $\forall a, b \in K : a > b \iff a - b > 0$
- **anders**: ein Körper heißt angeordnet, wenn $\forall a, b, c \in K$ die **Anordnungsaxiome** gelten:
  - $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
  - $0 \leq a \;\wedge\; 0 \leq b \implies 0 \leq a \cdot b$ (alternativ $a \leq b \;\wedge\; 0 \leq c \implies a \cdot c \leq b \cdot c$)
- **Eigenschaften** eines angeordneten Körpers (Ungleichungsregeln):
  - das Negative eines positiven Elements ist negativ und das Negative eines negativen Elements ist positiv
    - $\forall a \in K, a \neq 0$: entweder $-a < 0 < a$ oder $a < 0 < -a$
  - man darf Ungleichungen addieren: $a \leq b, c \leq d \implies a + c \leq b + d$
  - man darf Ungleichungen mit positiven Elementen multiplizieren: $a \leq b, 0 \leq c \implies ac \leq bc$
  - Quadratzahlen sind nichtnegativ: $0 \leq a^2$
    - jede Summe von Quadraten ist nichtnegativ
  - jede Summe von Einsen ist positiv: $0 < 1 + 1 + ... + 1$
- **Beispiele**:

- $\mathbb{N}$ ist **kein** Körper, da für ein beliebiges x das Inverse $-x$ nicht in $\mathbb{N}$ enthalten ist
- $\mathbb{Z}$ ist **kein** Körper, da für ein beliebiges x das Inverse $\frac{1}{x}$ nicht in $\mathbb{Z}$ enthalten ist
- $\mathbb{R}$ und jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$ sind **angeordnete** Körper
- $\mathbb{C}$ ist kein **angeordneter** Körper, da $i^2 = -1$, $-1 < 0$ und $0 \leq a^2\ \forall a$, aber $0 \leq i^2 \equiv 0 \leq -1$ zu einem Widerspruch führt

- **Intervalle**:
  - **geschlossen**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
  - **offen**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  - **halboffen**: selbstverständlich...

Obere / Untere Schranke, Maximum / Minimum, Supremum / Infimum

- sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.
  - **obere Schranke**: ein Element $b \in M$ heißt obere Schranke von M, wenn $\forall x \in M : x \leq b$
  - **untere Schranke**: ein Element $b \in M$ heißt untere Schranke von M, wenn $\forall x \in M : b \leq x$
  - **nach oben bzw. unten beschränkte Menge**: wenn eine obere (untere) Schranke von M existiert, heißt M nach oben (unten) beschränkt ($\exists k \in \mathbb{R}\ \forall s \in M : k \geq s$ bzw. $k \leq s$)
  - **nach oben bzw. unten unbeschränkte Menge**: ist M nicht nach oben (unten) beschränkt, so heißt M nach oben (unten) unbeschränkt ($\nexists k \in \mathbb{R}\ \forall s \in M : k \geq s$ bzw. $k \leq s$)
  - **beschränkte Menge**: M ist nach oben **und** unten beschränkt, also liegt M in einem endlichen Interval ($\exists R \in \mathbb{R}\ \forall s \in M : |s| < R$)
  - **Supremum** $\sup(M)$: ein Element $b \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M, wenn b eine **kleinste obere Schranke** von M ist ($\forall$ obere Schranke x von M: $b \leq x$)
  - **Infimum** $\inf(M)$: ein Element $b \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M, wenn b eine **größte untere Schranke** von M ist ($\forall$ untere Schranke x von M: $b \geq x$)
  - **Maximum** $\max(M)$: falls M nach oben beschränkt und das Supremum von M in M enthalten ist, bezeichnet man das Supremum auch als Maximum von M
  - **Minimum** $\min(M)$:falls M nach unten beschränkt und das Infimum von M in M enthalten ist, bezeichnet man das Infimum auch als Minimum von M

- **Eigenschaften** für $M \subseteq \mathbb{R}$:
  - M **nach oben beschränkt** und **nicht leer** $\implies$ M besitzt ein **Supremum**
  - M **nach unten beschränkt** und **nicht leer** $\implies$ M besitzt ein **Infimum**
  - M **nach oben unbeschränkt** $\implies$ $\sup(M) = +\infty$ (**kein Supremum** vorhanden!)
  - M **nach unten unbeschränkt** $\implies$ $\inf(M) = -\infty$ (**kein Infimum** vorhanden!)

    - *Konvention*: $\sup(\emptyset) = -\infty, \inf(\emptyset) = \infty$
- **Regeln für Supremum / Infimum**: für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R}$ gelten...
    - $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ für $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
        - $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$
    - $\lambda \geq 0 \implies \sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ für $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$
        - $\lambda \geq 0 \implies \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$
    - $A, B \subseteq [0, \infty) \implies \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ für $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$
        - $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$
    - $A \subseteq B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$
        - (!) $\inf(A) \geq \inf(B)$
    - $\sup(-A) = -\inf(A)$ für $-A = \{-a : a \in A\}$
        - $\inf(-A) = -\sup(A)$
- eine Funktion $f : A \to B$ ist...
    - nach **oben** beschränkt, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall x \in A : f(x) \leq s$
        - s ist **obere Schranke** von f
        - die **kleinste obere Schranke** ist das **Supremum** von f
    - nach **unten** beschränkt, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall x \in A : f(x) \geq s$
        - s ist **untere Schranke** von f
        - die **größte untere Schranke** ist das **Infimum** von f
- **vollständige angeordnete Körper**: ein angeordneter Körper K heißt *vollständig*, falls...
    - jede **nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge** ein **Supremum** besitzt
    - jede **nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge** ein **Infimum** besitzt
    - **Axiom**: seien $A, B \subseteq K$ nicht leer und $\forall a \in A, b \in B : a < b$, dann $\exists c \in K : a \leq c \leq b \; \forall a \in A, b \in B$
- **Vollständigkeitsaxiom**: $\mathbb{R}$ ist vollständig (genauer: $\mathbb{R}$ ist der einzige vollständige angeordnete Körper)
    - jede **nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge der reelen Zahlen** besitzt ein **Supremum** ($M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset, \exists b \in \mathbb{R} \; \forall x \in M : x \leq b \implies \exists \sup(M)$)
    - jede **nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge der reelen Zahlen** besitzt ein **Infimum** ($M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset, \exists b \in \mathbb{R} \; \forall x \in M : x \geq b \implies \exists \inf(M)$)
- **Bemerkung (Beweis)**: $\mathbb{Q}$ ist [nicht vollständig]
    - seien $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2}\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \sqrt{2}\}$

- wäre $\mathbb{Q}$ vollständig, müsste es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ geben mit $a \leq q \leq b$ für alle $a \in A, b \in B$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \implies \mathbb{Q} = A \cup B$, folglich muss $q \in A$ oder $q \in B$ gelten
- **Fall 1**: $q \in A$
  - $q \in A \implies \sqrt{2} - q > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \sqrt{2} - q$
  - $0 < \frac{1}{n} < \sqrt{2} - q \implies q < q + \frac{1}{n} < \sqrt{2}$
  - $q + \frac{1}{n} \in A, q < q + \frac{1}{n} \rightarrow$ Widerspruch! (siehe: $a \leq q$ für **alle** $a \in A$)
- **Fall 2**: $q \in B$
  - $q \in B \implies q - \sqrt{2} > 0 \implies \exists m \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{m} < q - \sqrt{2}$
  - $0 < \frac{1}{m} < q - \sqrt{2} \implies \sqrt{2} < q - \frac{1}{m} < q$
  - $q - \frac{1}{m} \in B, q - \frac{1}{m} < q \rightarrow$ Widerspruch! (siehe: $q \leq b$ für **alle** $b \in B$)
- $q \notin A, q \notin B, \mathbb{Q} = A \cup B \implies q \notin \mathbb{Q} \implies \mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

- **Beispiele**:
  - $\sup\{1, 2, 3\} = 3$
  - $\sup\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = 1$
  - $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
  - $\sup\{(-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$
  - $\sup \mathbb{Z} = +\infty$

Offene und abgeschlossene reele Mengen

- **Umgebung**: ein offenes Interval (a, b), wofür $x \in (a, b)$ gilt, heißt Umgebung von x
  - für ein $\delta > 0$ heißt das offene Interval $(x - \delta, x + \delta)$ die δ-Umgebung von x
- **offene Mengen**: eine Menge M ist offen, falls es für jedes x aus M eine reele Zahl $\epsilon > 0$ gibt, so dass jeder Punkt $y \in \mathbb{R}$, dessen Abstand zu x kleiner ist als ϵ, in M liegt
  - **anschaulich**: eine Menge ist offen, wenn ihre Elemente nur von Elementen dieser Menge umgeben sind
  - **Beispiel**: $(0, 1)$
- **abgeschlossene Mengen**: eine Menge M ist abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist ($\mathbb{R} \backslash M$ ist offen)
  - **Beispiel**: $[0, 1]$
- **Bemerkungen**:
  - **Theorem**: falls M gleichzeitig offen und abgeschlossen ist, ist $M = \emptyset$ oder $M = \mathbb{R}$
    - $\mathbb{R}$ ist offen, dabei ist $\emptyset$ abgeschlossen
    - $\emptyset$ ist offen, dabei ist $\mathbb{R}$ abgeschlossen

- jedes **offene Interval** ist eine **offene Menge**
- die **Vereinigung offener Mengen** ist eine **offene Menge**
- jedes **abgeschlossene Interval** ist eine **abgeschlossene Menge**
- jede **endliche Menge** ist **abgeschlossen**
- $a < b$: das Interval $[a, b)$ ist **weder offen, noch abgeschlossen**
- $\mathbb{Q}$ ist **weder offen, noch abgeschlossen**

Euklidischer Vektorraum, Ungleichungen

- euklidischer Vektorraum $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n\}$:
  - **Addition**: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  - **Produkt mit $\lambda \in \mathbb{R}$**: $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$
  - **Skalarprodukt** $\langle x, y \rangle$: $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$
  - **euklidische Norm**: $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$
- **Eigenschaften des Skalarprodukts**:
  - **bilinear**:
    - 1. Argument: $\langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$
    - 2. Argument: $\langle x, \lambda y + y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$
  - **symmetrisch**: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
  - **positiv definit**:
    - $\langle x, x \rangle \geq 0$
    - $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- **REZEPT: Prüfe, ob eine Abbildung ein Skalarprodukt ist**:
  - eine Abbildung ist ein Skalarprodukt, wenn **Linearität im I. Argument, Symmetrie und positive Definitheit** gelten

Ungleichungen

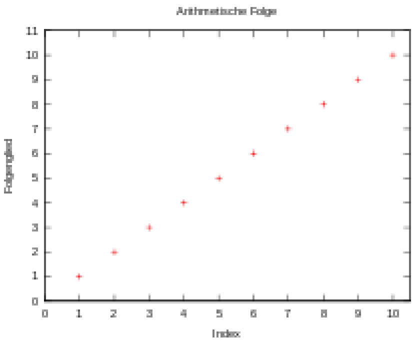
- **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
  - äquivalent: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$
  - $|\langle x, y \rangle| = ||x|| \cdot ||y|| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$ oder $y = \lambda x$
  - **Beweis(e)**: hier
- **Dreiecksungleichung**: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$
  - $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 : x = \lambda y$ oder $y = \lambda x$
  - **für reele Zahlen**: $|x + y| \leq |x| + |y|$

- **Beweis** (mit Cauchy-Schwarz): $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$
- **umgekehrte Dreiecksungleichung**: $|x-y| \geq |\,|x| - |y|\,|$

- Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel für nichtnegative Zahlen: $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$
  - $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \iff x_1 = \ldots = x_n$
  - **für zwei nichtnegative Zahlen**: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
  - **Beweis** (für zwei Zahlen):
    - $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x+y)^2 - 4xy$
    - $0 \leq (x+y)^2 - 4xy \implies 4xy \leq (x+y)^2 \implies xy \leq \frac{(x+y^2)}{4} = (\frac{x+y}{2})^2 \ldots$

Folgen

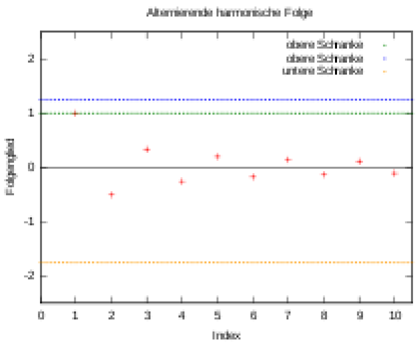
- Folge / Sequenz: eine Folge ist eine Auflistung von endlich oder unendlich vielen fortlaufen nummerierten Objekten (e.g. Zahlen)
  - **formal**: $a : \mathbb{N} \to X, i \mapsto a_i$ (Index i, Folgeglied a_i)



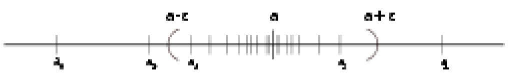
  - **Angabemöglichkeiten**:
    - **explizit**: $x_n = 2^n$
    - **rekursiv**: $x_{n+1} = 2x_n, x_0 = 1$
  - **Beispiel**: $(p_n)_{i\in\mathbb{N}} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ ist die Folge der Primzahlen

- Monotonie:
  - **monoton wachsend**: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ (von Glied zu Glied gleich oder zunehmend)
    - **streng monoton wachsend**: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (von Glied zu Glied zunehmend)
    - **Beispiel**: $a_k = -\frac{1}{k} = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \ldots)$ ist streng monton wachsend
  - **monoton fallend**: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ (von Glied zu Glied gleich oder senkend)
    - **streng monoton fallend**: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (von Glied zu Glied senkend)
    - **Beispiel**: $a_k = \frac{1}{k} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots)$ ist streng monton fallend
  - **Gegenbeispiel**: $a_k = (-1)^k = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ist weder monoton fallend noch steigend (also insgesamt nicht monoton)

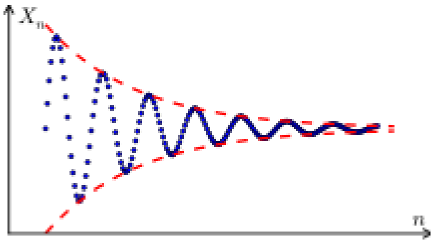
- **Beschränktheit**:
  - eine Folge heißt **nach oben / unten beschränkt**, wenn sie eine **obere / untere Schranke** S besitzt, so dass $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \leq S$ bzw. $\forall i \in \mathbb{N} : a_i \geq S$

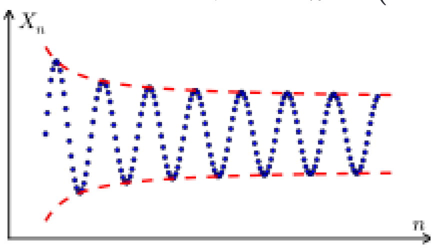
  - die **kleinste obere Schranke / größte untere Schranke** einer Folge heißt das **Supremum / Infimum**
  - eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie zugleich **nach oben und nach unten beschränkt** ist
    - **äquivalent**: a_n heißt beschränkt, falls die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist
    - **äquivalent²**: $\exists K > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$
  - **Satz für Beschränktheit von konvergenten Folgen**: jede **konvergente** Folge ist **beschränkt** (aber nicht umgekehrt!)
    - **Beweis**:
      - sei $\lim_{n \to \infty} a_n = a$
      - wegen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $\epsilon = 1, n \geq N$
      - seien $t = \min\{a_0, a_1, ..., a_{N-1}, a - 1\}$ und $s = \max\{a_0, a_1, ..., a_{n_0 - 1}, a + 1\}$
      - somit gilt $t \leq a_n \leq s$ für alle Folgenglieder $\implies$ (a_n) ist beschränkt
- **REZEPT: Nachweis der Beschränktheit bzw. Monotonie**:
  - wenn alle Folgeglieder positiv / negativ sind, ist die Folge durch 0 nach unten / oben beschränkt
  - $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{n+1} - a_n \geq 0 \implies a_n$ monoton wachsend
  - $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{n+1} - a_n \leq 0 \implies a_n$ monoton fallend
  - $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_n$ monoton wachsend
  - $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \implies a_n$ monoton fallend
  - Monotonie und Beschränktheit können intuitiv vermutet werden und per Induktion bewiesen werden
- **Grenzwert / Limes**: der Grenzwert ist eine Zahl, der die Folgeglieder beliebig nahekommen
  - **formal**: $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass stets $|a_n - a| < \epsilon$ gilt, falls $n \geq N$

- **anders**: ϵ ist eine beliebig kleine positive Zahl; es ist dann stets möglich, ein genügend großes N zu finden, dass a_N und alle darauf folgenden Glieder die Bedingung erfüllen
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$
- **Schreibweisen**: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder kurz $a_n \to a$ (die Folge a_n *konvergiert* gegen a)
- **Konvergenz / Divergenz**:
  - die Folge a_n konvergiert, wenn der Grenzwert a existiert



  - die Folge a_n divergiert, wenn **kein** Grenzwert a existiert (*bestimmt* $a \to \pm\infty$, z.B. $a_n = n$, oder *unbestimmt*, z.B. $a_n = (-1)^n$)



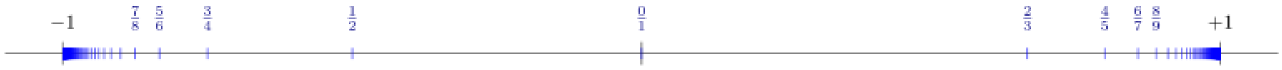
- **Eindeutigkeit des Grenzwertes**: wenn die Folge a_n einen Grenzwert a besitzt, ist dieser eindeutig
  - **Beweis**:
    - seien a, b zwei Grenzwerte von a_n, $a \neq b$
    - wähle $\epsilon < \frac{1}{2}|a - b|$, $|a - b| > 0$ und betrachte die Umgebungen $(a - \epsilon, a + \epsilon), (b - \epsilon, b + \epsilon)$
    - $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (b - \epsilon, b + \epsilon) = \emptyset$, aber nach Definition des Grenzwertes müssen ab einem bestimmten Index alle Folgeglieder in der ϵ-Umgebung des Grenzwertes liegen, was nur dann möglich wäre, wenn $a = b$
- **Lemma**: für $x_n \to x, y_n \to y$, falls $\forall n : x_n \leq y_n$, dann $x \leq y$
- **bestimmte Divergenz** gegen $\pm\infty$: bestimmte Divergenz liegt genau dann vor, wenn eine Folge a_n jede reele Zahl irgendwann **überschreitet / unterschreitet** und dann **darüber / darunter** bleibt
  - **formal**: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n > M$ bzw. $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : a_n < M$

* **Rechenregeln / Hilfsmittel für Grenzwerte**:
  - für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gelten für jedes $c \in \mathbb{R}$...
    - $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$
    - $\lim_{n\to\infty}(c + a_n) = c + a$

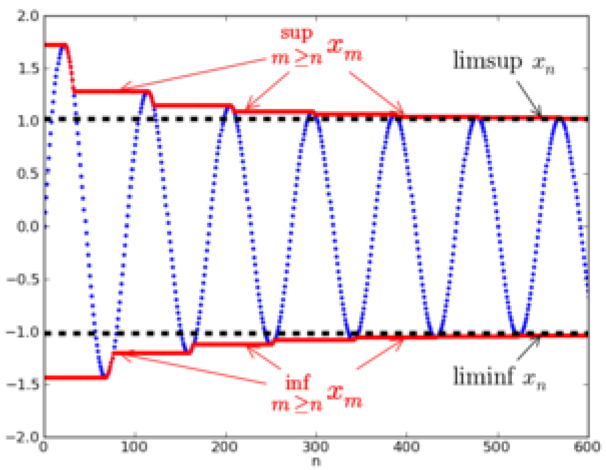
    - $\lim_{n\to\infty}(c - a_n) = c - a$
    - $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{a_n} = \frac{c}{a}$ für $a \neq 0$
    - $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}) = \sqrt{a}$ falls $a_n \geq 0$ für alle n
  - für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gelten...
    - $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
    - $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$
    - $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
    - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ für $b \neq 0$
    - $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
- **wichtige Grenzwerte**:
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
  - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  - $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z,\ z \in \mathbb{C}$
  - $\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a,\ a \in \mathbb{R}_{>0}$
- **REZEPT: Grenzwerte für rekursive Folgen:**
  1. zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert (z.B. dadurch, dass die Folge *beschränkt* und *monoton* ist)
  2. stelle Fixpunktgleichung auf (ersetze a_{n+1} und a_n durch a)
  3. löse Fixpunktgleichung
  4. eliminiere Werte von a, die nicht möglich sind
  - **Beispiel**:
    - sei $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$
    - a_n ist beschränkt ($0 \leq a_n \leq 2$, z.B. Induktion) und monoton wachsend
    - Fixpunktgleichung: $a = \sqrt{2a}$
    - Lösungen: $a = 0$ und $a = 2$
    - $a = 0$ ist nicht möglich, da der Anfangswert 1 ist und die Folge monoton wächst, also ist 2 der Grenzwert
- **TIPP**: bei einer Folge, die als Bruch dargestellt wird, kann im Zähler und Nenner die höchste Potenz von n "ausgeklammert" werden, um quasi Terme der Form $\frac{x}{n^k} \to 0$ zu erzwingen
  - **allgemein**: für eine Folge $a_n = \frac{a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \ldots + b_1 n + b_0}$ gilt...
    - $a_n \to \begin{cases} 0 & \text{falls } r < s \\ +\infty & \text{falls } s < r, a_r/b_s \in \mathbb{R}_{>0} \\ -\infty & \text{falls } s < r, a_r/b_s \in \mathbb{R}_{<0} \\ a_r/b_s & \text{falls } s = r \end{cases}$
  - **Beispiel**: $a_n = \frac{3n^2+7n+8}{5n^2-8n+1} = \frac{3+7/n+8/n^2}{5-8/n+1/n^2} \to \frac{3}{5}$

Beschränkte Folgen, Limes superior und Limes inferior

- **Häufungspunkt**: eine Zahl a heißt Häufungspunkt einer Folge a_n, wenn es eine Teilfolge a_{n_k} gibt, die gegen a konvergiert ($\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$)



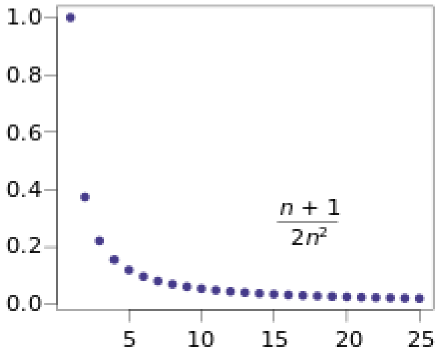
- **Limes superior**: als Limes superior wird der **größte** Häufungspunkt der Folge bezeichnet
  - $\limsup a_n = \inf\{\sup\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$
  - für nach oben unbeschränkte Folgen gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$
- **Limes inferior**: als Limes inferior wird der **kleinste** Häufungspunkt der Folge bezeichnet
  - $\liminf a_n = \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$
  - für nach unten unbeschränkte Folgen gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- $x_n \to x \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$



- **Satz von Bolzano-Weierstraß** (Existenz konvergenter Teilfolgen):
  - jede **beschränkte** Folge (mit unendlich vielen Gliedern) enthält (mindestens) eine **konvergente Teilfolge**
  - jede **beschränkte** Folge (mit unendlich vielen Gliedern) hat (mindestens) einen **Häufungspunkt**
  - jede **beschränkte** Folge reeller Zahlen hat (mindestens) einen **Häufungspunkt**
- **Cauchy-Kriterium** (entscheide, ob eine Folge konvergiert oder divergiert): eine Folge a_n reeler oder komplexer Zahlen konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index N gibt, sodass der Abstand zweier beliebiger Folgeglieder ab diesem Index $|a_m - a_n|$ kleiner als ϵ ist
  - **formal**: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \epsilon$
  - **Beispiel**: $a_n = \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n^2) \\ a_0 = 0 \end{cases}$

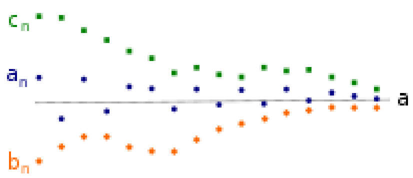
- $|a_n + a_{n-1}| = |\frac{1}{2}(1-a_n^2) - \frac{1}{2}(1-a_{n-1}^2)| = \frac{1}{2}|a_n^2 - a_{n-1}^2| = \frac{1}{2}|a_n + a_{n-1}||a_n + a_{n-1}| \leq \frac{1}{2}|a_n + a_{n-1}|$
- wende Gleichung n-mal an: $|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_1 - a_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- setze $q = \frac{1}{2}$
- allgemein: $|a_m - a_n| \leq \sum_{i=0}^{m-n-1} q^i |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1-q^{m-n}}{1-q} q^{n+1} \leq \frac{1}{1-q} q^{n+1} = 2q^{n+1} = q^n < \epsilon$
- laut Cauchy-Kriterium ist für alle $n, m > N = \frac{\ln \epsilon}{\ln q}$ die Folge a_n konvergent

- **Monotoniekriterium**: jede monotone, beschränkte Folge konvergiert
  - **formal**: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : a_n \leq a_{n+1}, \exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \geq N : a_n \leq K \implies \lim_{n \to \infty} a_n \leq K$ (analog fallend)



  - **Beispiel**: $a_n = \frac{n}{n+1}$
    - Monotonie: $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} < \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1}$
    - Begrenztheit: $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$
    - folgt: $\lim_{n \to \infty} a_n \leq 1$

- **Sandwichkriterium**: wenn eine Folge zwischen zwei konvergierenden Folgen mit **demselben Grenzwert** liegt, dann muss sie **auch** gegen diesen Grenzwert konvergieren
  - **formal**: seien x_n, y_n zwei reele Folgen mit $x_n \to a, y_n \to a, x_n \leq y_n$
  - ist w_n eine weitere Folge mit $x_n \leq w_n \leq y_n$, so gilt $w_n \to a$

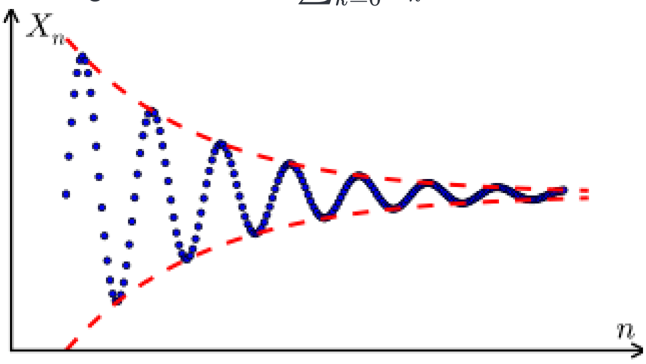


  - **Beispiel**: $w_n = \frac{1}{n + \log n^2 + 3}$
    - $0 \leq \frac{1}{n + \log n^2 + 3} \leq \frac{1}{n} \implies w_n \to 0$

Reihen

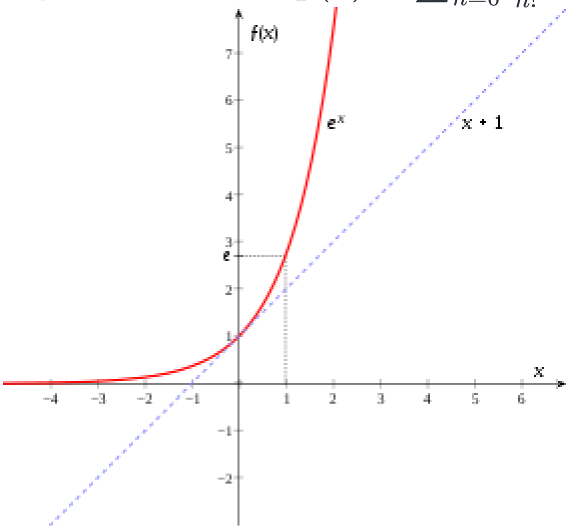
- **Reihe / Summenfolge**: eine Reihe ist eine **Summe** mit **unendlich vielen Summanden**
  - **formal**: $s_n := a_0 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
  - **Beispiel**: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$

- **Konvergenz**: konvergiert die Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so nennt man ihren Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ den **Wert / Summe** der Reihe
  - eindeutig, wird als $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet



  - absolute Konvergenz: eine Reihe ist absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ konvergiert
    - **Beispiele**:
      - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ist wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ absolut konvergent (siehe Basler Problem)
      - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist zwar konvergent (gegen $\ln(2)$), aber wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **nicht** absolut konvergent (siehe harmonische Reihe)
- geometrische Reihe: eine geometrische Reihe ist die Reihe einer geometrischen Folge (der Quotient q zweier benachbarter Folgeglieder ist konstant)
  - **geometrische Summenformel**: $\forall q \neq 1, n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
  - **divergenter Fall für** $|q| \geq 1$: ein Quotient q mit $|q| \geq 1$ ergibt eine **divergente** geom. Reihe
    - $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$
    - **Beispiel**: $\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k = 5 + 15 + 45 + 135 + \ldots = \infty$
  - **konvergenter Fall für** $|q| < 1$: ein Quotient q mit $|q| < 1$ ergibt eine **konvergente**
    - $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}$
    - es gelten $0^0 = 1$ und $\lim_{a\to 0} a^a = 1$
    - **Beispiel**: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
- harmonische Reihe: die harmonische Reihe ist die Reihe, die durch Summation der Glieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ entsteht
  - **n-te harmonische Zahl / n-te Partialsumme**: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$
  - **Divergenz**: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
    - **Beweis** (Minorantenkriterium):
      - $H_n = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \ldots + 1/n$
        $\geq 1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + \ldots + 1/n$
        $= 1 + 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/n \to \infty$

- **Exponentialreihe**: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$



- **Regeln**:
  - $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=0}^{\infty} b_k = b \implies \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$
  - $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \implies \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k = ca$
- **Cauchy-Kriterium für Reihen**: eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn zu jedem Abstand $\epsilon > 0$ ein Mindestindex N existiert, so dass für alle Indizes $n \geq m \geq N$ der Betrag von $\sum_{k=m}^{n} a_k$ kleiner als ϵ ist
  - **formal**: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m \geq N : |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$
  - **äquivalent**: eine konvergente Reihe erfüllt das Cauchy-Kriterium, und umgekehrt besitzt jede reelle Reihe, die das Cauchy-Kriterium erfüllt, einen reellen Grenzwert
- **Satz**: ist $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine reele Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist (s_n) konvergent genau dann, wenn (s_n) beschränkt ist

Vergleichskriterien für Konvergenz

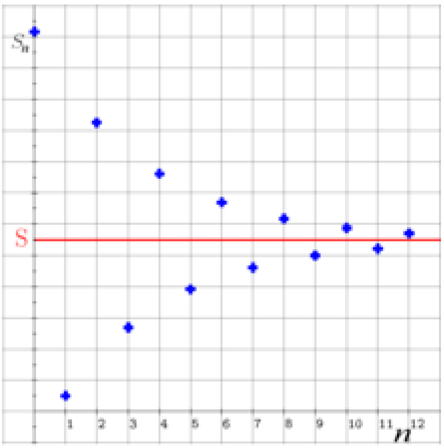
- **Nullfolgenkriterium**: bildet die Folge der Summanden einer Reihe **keine** Nullfolge, dann **divergiert** die Reihe
  - **Beispiel**: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1}$ divergiert, denn $\lim_{i\to\infty} \frac{i}{i+1} = 1 \neq 0$
- **Majorante**: ist $\sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Reihe mit Werten in $\mathbb{C}$, so heißt eine Reihe $\sum_{k=0}^{n} b_k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $|a_k| \leq b_k$ **Majorante** von $\sum_{k=0}^{n} a_k$
  - jeder Wert von b_k ist **größer oder gleich** jedem Wert von a_k im selben Index k
  - **Beispiel**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ist Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$
- **Minorante**: ist $\sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Reihe mit Werten in $\mathbb{C}$, so heißt eine Reihe $\sum_{k=0}^{n} b_k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $|a_k| \geq b_k$ **Minorante** von $\sum_{k=0}^{n} a_k$
  - jeder Wert von b_k ist **kleiner oder gleich** jedem Wert von a_k im selben Index k
  - **Beispiel**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

- **Majorantenkriterium**: eine unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, die eine **konvergente** Majorante mit nichtnegativen Summanden $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ besitzt, ist **absolut konvergent**
  - **formal**: sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $b_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ **konvergent**, dann $\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq b_n \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergiert absolut**
  - **Beispiel**: prüfe, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+5)^2}$ konvergiert
    - $\left|\frac{1}{(n^2+5)^2}\right| = \frac{1}{(n^2+5)^2} = \frac{1}{n^4+10n^2+25} < \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n^2}$
    - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+5)^2}$ absolut
- **Minorantenkriterium**: eine unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, die eine **divergente** Minorante mit nichtnegativen Summanden $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ besitzt, ist **divergent**
  - **formal**: sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $b_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ **divergent**, dann $\forall n \geq n_0 : a_n \geq b_n \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **divergent**
  - **Beispiel**: prüfe, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergiert
    - $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$
    - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergiert, also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
- **Quotientenkriterium**: die Abschätzung einer Reihe (als geometrische Reihe) ist genau dann konvergent, wenn der Betrag der Folgeglieder abnimmt, also der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder q kleiner als 1 ist, sonst ist sie divergent
  - **formal**: sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reele oder komplexe Reihe mit $a_n \not= 0$ für $n \to \infty$
  - gibt es ein $q < 1$ und $n_0 \geq 0$, so dass $\forall k \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$, ist die Reihe **absolut konvergent**
    - **Beispiel**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+n}{10^n}$
      - $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{5+(n+1)}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{5+n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{6+n}{5+n} \leq \frac{3}{25} < 1 \implies$ die Reihe ist absolut konvergent
  - gilt stattdessen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, so **divergiert** die Reihe
    - **Beispiel**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$
      - $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2} \geq 1 \implies$ die Reihe ist divergent
  - **alternativ**: für $S = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gilt...
    - $S < 1 \implies$ die Reihe konvergiert absolut
    - $S > 1 \implies$ die Reihe divergiert
    - $S = 1 \implies$ unbestimmt
- **Monotoniekriterium**: eine Reihe mit nichtnegativen reellen Summanden konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummen nach oben beschränkt sind

- **formal**: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall i \geq N : a_i \geq 0, \exists K \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} a_i \leq K \implies \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n \leq K$ (analog fallend)
- **Beispiel**: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$

Alternierende Reihen, Umordnungen

- alternierende Reihe: eine alternierende Reihe ist eine unendliche Reihe, dessen Glieder abwechselnde Vorzeichen haben
  - **formal**: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$
  - **Beispiel**: $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$
- Leibniz-Kriterium: ist (a_n) eine **monoton fallende, reele** Nullfolge, dann **konvergiert** die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$
  - **formal**: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert



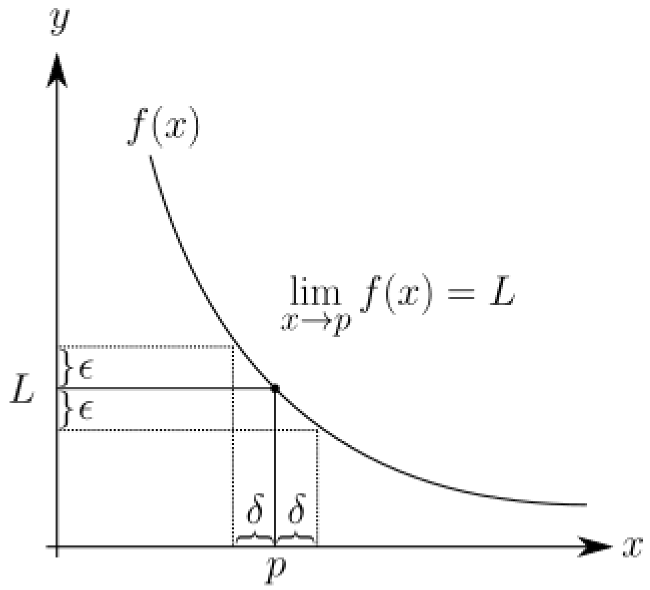
  - **Abschätzung des Restglieds der Summe nach N Summanden**: $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \leq a_{N+1}$
  - **Beispiel** (Leibniz-Reihe, unrelated): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
  - **Beweis**:
    - sei $(s_0, s_2, s_4, \ldots) = (s_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Partialsummen von $s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$
    - **Schritt 1**: (s_{2k}) ist monton fallend
      - $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend $\implies s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k}$
    - **Schritt 2**: (s_{2k}) ist nach unten beschränkt
      - $s_{2k} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k} \geq a_{2k} \geq 0$
    - aus (1) und (2) folgen laut Monotoniekriterium, dass (s_{2k}) konvergiert
    - beweise analog, dass $(s_1, s_3, s_5, \ldots) = (s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert
    - $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(s_{2k} - a_{2k+1})$
      $= \lim_{k\to\infty} s_{2k} - \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} - 0$
      $= \lim_{k\to\infty} s_{2k}$
- **Umordnungssatz (?)**: eine Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert genau dann absolut, wenn für jede Permutation σ von $\mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe gegen denselben Wert konvergiert

    - **formal**: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
    - **kurz**: wenn eine Reihe konvergiert, aber die absolute Variante divergiert, ist sie nicht absolut konvergent, z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
- **Doppelreihensatz (?)**: falls $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{k,j}| < \infty$ (abs. konvergiert), gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,j}$
- **Cauchy-Produkt**: sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei *absolut konvergente* Reihen, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ebenfalls *absolut konvergent*
    - **formal**: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
    - zusätzlich gilt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$
        - $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0)$
    - **Beispiel**: Beweis, dass $e^x e^y = e^{x+y}$
        - bekannt: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, absolut konvergent
        - $e^x e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^k y^{n-k}$
        - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \implies \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
        - $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n \implies \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}$, QED

Funktionen, Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

- **isolierter Punkt**: ein Element a einer Menge X heißt isolierter Punkt, wenn es eine Umgebung $U_e(a), \epsilon > 0$ von a gibt, die keine weiteren Elemente aus X außer a enthält
    - **äquivalent**: a ist isoliert $\iff$ a ist **kein** Häufungspunkt von X ($\nexists a_n : \lim_{n\to\infty} a_n = a$)
    - **Beispiele**:
        - $M := \{0\} \cup [1, 2] \Rightarrow$ 0 ist ein isolierter Punkt
        - $M := \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \Rightarrow$ 0 ist *kein* isolierter Punkt, dafür aber $\frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
        - $\mathbb{N} \Rightarrow$ alle Elemente sind isolierte Punkte
- **Grenzwert einer Funktion**: der Limes / Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle p ist **der Wert L, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert**, falls

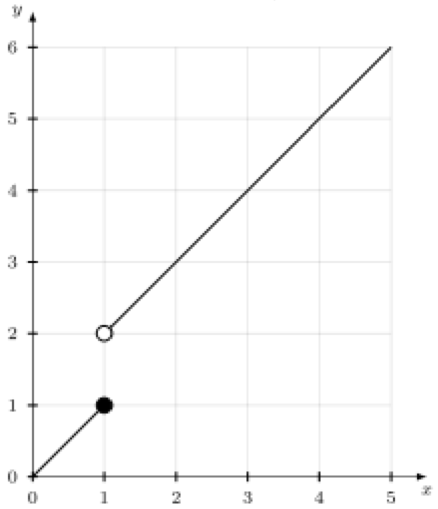
dieser existiert



- **(!)** p muss nicht im Definitionsbereich D von f enthalten sein, muss aber ein **Häufungspunkt** von D sein (oder $\pm\infty$)
- **Schreibweise**: $\lim_{x\to p} f(x) = a$ (oder $\pm\infty$)
- **formal**:
  - sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein Häufungspunkt von D und $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
  - $\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in D\backslash\{p\}, \lim_{n\to\infty} x_n = p : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

- **allg. Grenzwertsätze**: seien $f : D \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to p} f(x) = a$ und $\lim_{x\to p} g(x) = b$...
  - $\lim_{x\to p}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) \pm \lim_{x\to p} g(x) = a \pm b$
  - $\lim_{x\to p}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x) = a \cdot b$
  - $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)} = \frac{a}{b}$ für $b \neq 0$
- **stetige Funktionen**: eine stetige Funktion ist anschaulich eine **zusammenhängende** Funktion, die gezeichnet werden kann, **ohne den Stift zu heben**
  - **formal**: eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
  - **Folgenkriterium**: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \iff \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 : \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$
  - **äquivalent (Epsilon-Delta-Kriterium)**: eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

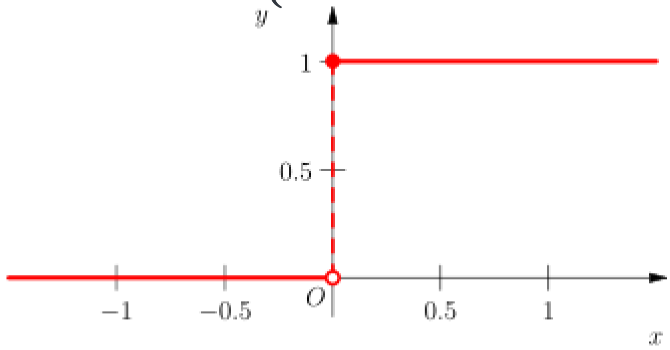
- **Beispiel**: $f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ x+1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$ ist im Punkt $x_0 = 1$ **nicht** stetig



- f heißt stetig in D. falls f stetig ist in x für **alle** $x \in D$
- **(!)** ist eine Funktion an einer Stelle differenzierbar, so ist sie dort auch stetig
- **Satz**: sind f, g Funktionen mit Definitionsbereich D und stetig in $x \in D$, sind auch $f + g, f - g, f \cdot g, \lambda f + \mu g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$) stetig in x
- **Satz**: sind f, g stetige Funktionen in x_0 mit $f(D_f) \subseteq D_g$ (Definitionsbereich von g umfasst Wertebereich von f), dann ist die Komposition $g \circ f$ $(g(f(x)))$ auch stetig in x_0
- **(!)** alle rationale Funktionen, Exponentialfunktionen $x \to a^x$ (für $a \in \mathbb{R}_{>0}$), trigonometrische Funktionen $(\sin, \cos, \tan \ldots)$ und Logarithmusfunktionen sind in ihren Definitionsbereichen stetig

* **einseitiger (linksseitiger $-$ / rechtsseitiger $+$) Grenzwert**: bestimme den Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0 "von links / rechts angewandert"
  - **formal**: $f : D \to \mathbb{R}$ hat für $x \to p+$ den Limes L, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x-Werte aus D, die der Bedingung $0 < x - p < \delta$ genügen, auch $|f(x) - L| < \epsilon$ gilt (analog $x \to p-$)
  - **Beispiel**: für $\frac{1}{x}$ gilt $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$
  - ein (beidseitiger) Grenzwert existiert dann, wenn man "von beiden Seiten an x_0 angewandert" zum selben Wert kommt
    - **formal**: $\exists \lim_{x \to p} f(x) \iff \lim_{x \to p+} f(x) = \lim_{x \to p-} f(x)$
* **links- und rechtsseitige Stetigkeit**: die links- / rechtsseitige Stetigkeit ist die Eigenschaft, dass eine Funktion **nur von einer Seite aus gesehen stetig** ist
  - grob gesagt ist eine Funktion linksstetig, wenn bei Annäherung an den Grenzpunkt von links **kein Sprung** auftritt (analog rechts)
  - **formal**: eine Funktion f heißt linksseitig stetig in $x_0 \in D_f$, falls für den linksseitigen Grenzwert die Gleichung $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$ gilt (analog rechtsseitig)

- **Beispiel**: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ ist in 0 rechtsseitig, aber nicht linksseitig stetig

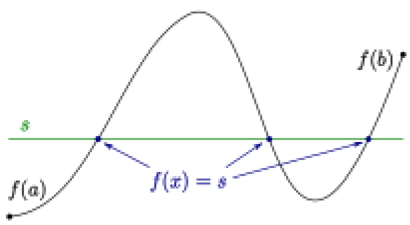


- wenn eine Funktion sowohl links-, als auch rechtsseitig stetig ist, so ist sie allg. stetig in x_0

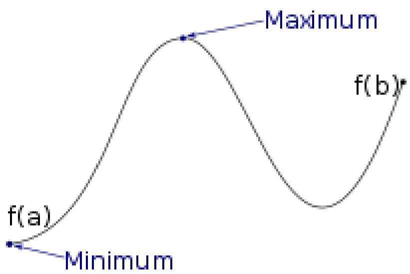
- **Fixpunktiteration**: Fixpunktiteration ist ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Lösungen einer Gleichung / eines Gleichungssystems der Form $\varphi(x) = x$ mit einer Funktion φ und einer Startnäherung $x_1 = \varphi(x_0)$, was dann weiter gelöst wird ($x_2 = \varphi(x_1)$ etc.)
  - **Beispiel**: $2 - x^2 = e^x$ in $M = [0.2; 0.7]$
    - erhalte Fixpunktgleichung durch Logarithmieren: $\ln(2 - x^2) = x$
    - setze $f(x) = \ln(2 - x^2)$
    - $x_0 = 0.2 \implies x_1 = f(0.2) = \ln(2 - 0.2^2) \approx 0.6729$
    - wiederhole...

Konsequenzen der Stetigkeit, Extrema

- **Zwischenwertsatz**: sei f eine auf $[a, b]$ definierte stetige Funktion mit $f(a) < s < f(b)$ oder $f(b) < s < f(a)$, dann gibt es **mindestens** ein x mit $f(x) = s$ (Sonderfall: **Nullstellensatz** für $s = 0$ und verschiedene Voreichen für $f(a)$ und $f(b)$)

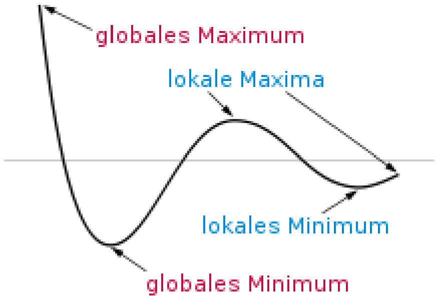


- **Satz vom Minimum und Maximum**: jede auf einem reelen Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und stetige Funktion ist **beschränkt** und **nimmt im Definitionsbereich ihr Maximum sowie Minimum an**



- **Fixpunktsatz**: ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$

- [Extrema](): $f : D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in D$...



  - ein **lokales Minimum**, wenn: $\exists I = (a,b), x_0 \in I \; \forall x \in I \cap D : f(x_0) \leq f(x)$
  - ein **globales Minimum**, wenn: $\forall x \in D : f(x_0) \leq f(x)$
  - ein **lokales Maximum**, wenn: $\exists I = (a,b), x_0 \in I \; \forall x \in I \cap D : f(x_0) \geq f(x)$
  - ein **globales Maximum**, wenn: $\forall x \in D : f(x_0) \geq f(x)$
- **Existenz von Extrema**: falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, nimmt f ein globales Maximum und ein globales Minimum an
- **REZEPT: Bestimmung von Extremstellen differenzierbarer Funktionen**
  - **notwendiges Kriterium**: $f'(x_0) = 0$
  - **hinreichendes Kriterium** (zweite Ableitung): $f''(x_0) \neq 0$
    - $f''(x_0) > 0 \implies$ lokales Minimum
    - $f''(x_0) < 0 \implies$ lokales Maximum
  - **hinreichendes Kriterium** (VZW der ersten Ableitung):
    - VZW $+ \to -$: lokales Maximum
    - VZW $- \to +$: lokales Minimum
  - untersuche das Verhalten von f in den **Randpunkten**
    - $D = [a,b] \implies$ bestimme $f(a), f(b)$
    - $D = (a,b) \implies$ bestimme $\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)$
    - $D = [a,b) \implies$ bestimme $f(a), \lim_{x \to b} f(x)$
    - $D = (a,b] \implies$ bestimme $\lim_{x \to a} f(x), f(b)$
  - das **größte lokale Maximum** ist das **globale Maximum**, das **kleinste lokale Minimum** ist das **globale Minimum** (falls diese existieren!)

Höhere Dimensionen (?)

- eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gegen ein $x \in R^d$, falls $\lim_{n \to \infty} ||x_n - x|| = 0$
  - für $D \subseteq \mathbb{R}^d, x \in D$ heißt $f : D \to \mathbb{R}$ in x stetig, falls für jede Folge (x_n) in D mit Grenzwert x gilt $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$
    - **äquivalent**: f heißt stetig, falls f in x für jedes $x \in D$ stetig ist

- **beschränkte Mengen**: eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\forall x \in D : ||x|| \leq K$
- **beschränkte Folgen**: eine Folge $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, falls $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist
  - für jedes n schreibt man $x_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,d})$ für $x_{n,k} \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq d$
- [kompakte Mengen](): eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie **beschränkt und abgeschlossen** ist (z.B. $[a, b], a < b \in \mathbb{R}$)
  - **äquivalent**: sie enthält keine Folge, die zwar konvergiert, deren Grenzwert jedoch **nicht** zur Menge gehört
- **Satz**: sei D kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann hat f ein Maximum und ein Minimum
- **Satz**: eine Folge $(x_n) \in \mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann gegen $x \in \mathbb{R}^d$, falls für $1 \leq k \leq d$ die Komponentenfolgen $(x_{n,k})_{n=1,2,...}$ gegen x_k gehen
- **Folgerung zum Satz von Bolzano-Weierstraß**: jede **beschränkte Folge** in $\mathbb{R}^d$ hat eine **konvergente Teilfolge** und damit einen **Häufungspunkt**
- **Lemma**: stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt ($f(D) = \{f(x) : x \in D\}$)

Umkehrfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion

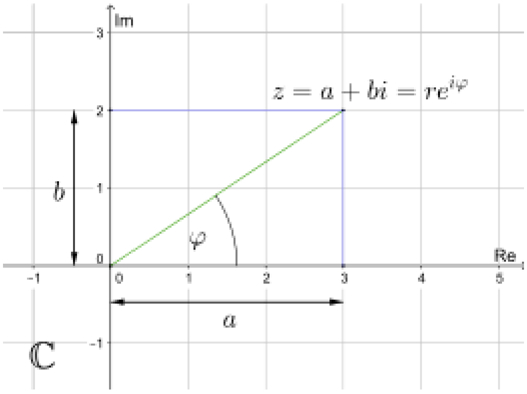
- [Umkehrfunktion](): die Umkehrfunktion einer **bijektiven** Funktion ist die Funktion, die jedem Element der Zielmenge sein **eindeutig bestimmtes Urbildelement** zuweist
  - **formal**: sei $f : A \to B$ bijektiv (d.h. $\forall y \in B \ \exists! x \in A : f(x) = y$), so ordnet $f^{-1} : B \to A$ jedem Element von B ihr eindeutig definiertes Urbildelement unter f zu ($f^{-1}(y) = x$)
  - **Bemerkung**: man erhält den Graphen von f^{-1}, indem man den Graphen von f an der Geraden $y = x$ spiegelt
  - **(!)** Umkehrfunktion von $\exp$: $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$
  - **(!)** Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen: [Arkusfunktionen]()
- [Stetigkeit der Umkehrfunktion](): sei I ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend; dann ist f^{-1} streng monoton steigend und stetig (analog für streng monoton fallende Funktionen)
- **REZEPT: Bestimmen der Umkehrfunktion**:
  - löse $f(x) = y$ nach x auf, so dass $x = g(y)$
  - setze $y = x$ und $g = f^{-1}$
- **Eigenschaften der Exponentialfunktion**:
  - $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
  - $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(z) \neq 0$
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$
  - $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$
  - $\forall n \in \mathbb{N} : \exp(n) = e^n$
  - monoton wachsend, $\forall z \in \mathbb{C} : |\exp(z)| \leq \exp(|z|)$

- **(!)** $\forall x > 0, a \in \mathbb{R} : x^a = \exp(a \ln(x))$

- **Eigenschaften der Logarithmusfunktion**:
  - $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : \exp(\ln(x)) = x$
  - $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(\exp(x)) = x$
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
  - $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}, r \in \mathbb{Q} : \ln(x^r) = r \ln(x)$
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
  - $\ln(1) = 0$
  - $\ln(e) = 1$

Komplexe Zahlen (LinAlg)

- grundlegende Informationen und Beispiele [hier]



- **[komplexe Zahl]**: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$
  - $x = Re(z), y = Im(z)$
- **[Polarkoordinaten]**: $z = re^{i\varphi}$
  - **äquivalent**: $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
- **[konjugiert komplexe Zahl]**: $\overline{z} = x - iy$
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- **Norm**: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- **Addition / Subtraktion**: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
- **Multiplikation**:
  - (!) Polardarstellung - Längen **multiplizieren**, Winkel **addieren**: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
  - Koordinatendarstellung: $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $i^1 = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

- **Umformen**:
  - **Koordinatensystem zu Polardarstellung**: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arccos(\frac{x}{r})$ für $y \geq 0$ oder $\varphi = -\arccos(\frac{x}{r})$ für $y < 0$
  - **Polardarstellung zu Koordinatensystem**: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

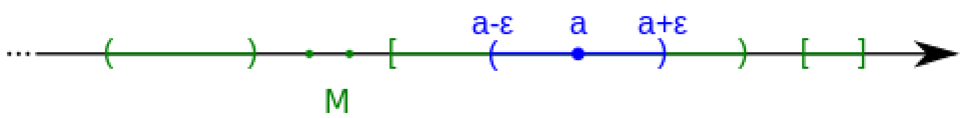
Trigonometrische Funktionen (sin, cos)

- $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$
- $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
- **Eulersche Formel**: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$
- **Regeln / Formeln**:
  - $\sin(0) = 0$
  - $\cos(0) = 1$
  - **Symmetrie**:
    - $\sin(-x) = -\sin(x)$
    - $\cos(-x) = \cos(x)$
  - **Verschiebung**:
    - $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
    - $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$
  - **Trigonometrischer Pythagoras**: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (wobei $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$)
  - **Additionstheoreme**:
    - $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
    - $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
  - **Winkelverdopplung**:
    - $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
    - $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
    - $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
    - $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
  - **Eulersche Identität**: $e^{i\pi} = -1$
  - $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
  - $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$
  - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Landau-Notation, Differentiation

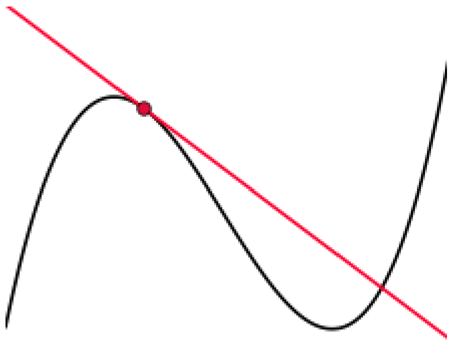
- **Landau-Symbole / Big O Notation**: Landau-Symbole beschreiben das **asymptotische Verhalten** von Funktionen und Folgen
  - $f = O(g)$: f wächst höchstens genauso schnell wie g
    - $f = O(g), x \to a < \infty \iff \exists C > 0\ \exists \epsilon > 0\ \forall x \in \{x : d(x,a) < \epsilon\} : |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$
    - **äquivalent**: $f = O(g) \iff \limsup_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$
  - $f = o(g)$: f wächst langsamer als g
    - $f = o(g), x \to a < \infty \iff \forall C > 0\ \exists \epsilon > 0\ \forall x \in \{x : d(x,a) < \epsilon\} : |f(x)| < C \cdot |g(x)|$
    - **äquivalent**: $f = o(g) \iff \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$
- **innerer Punkt**: jedes Element einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, zu dem sich eine Umgebung in $\mathbb{R}$ finden lässt, die **vollständig** in M liegt, ist ein innerer Punkt von M



  - **formal**: $x_0 \in M$ ist ein innerer Punkt von M, falls $\exists \epsilon > 0 : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq M$
  - $M \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, falls alle Punkte in M innere Punkte sind

Ableitung einer Funktion

- **Ableitung**: die Ableitung von $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ ist eine **Linearisierung** der Funktion f in einer Umgebung von x_0
- **Differenzierbarkeit**: eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, falls der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ mit $h = x - x_0$ existiert
  - $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in D, falls für jedes $x \in D$ die Funktion f differenzierbar in x ist
- **Tangente**, **Steigung der Tangente**: die Ableitung von f in x_0 entspricht der Steigung der Tangente von f in x_0



  - **Tangentengleichung**: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
  - **Steigung der Tangente von f in x_0**: $\tan\alpha = f'(x_0)$
- **Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit**: ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, dann ist f stetig in x_0 (aber **nicht** umgekehrt, siehe bsp. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$)
- **linksseitige / rechtsseitige Ableitung**: die linksseitige / rechtsseitige Ableitung ist die **Steigung der Tangente** an einem Punkt x_0 **"von links / rechts an betrachtet"**
  - **linksseitig**: $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, falls dieser existiert
  - **rechtsseitig**: $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, falls dieser existiert
  - **Beispiel**: $f(x) = |x|$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$
- **Wichtige Ableitungen**:
  - $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$
  - $f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$
  - $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}, a > 0 \implies f'(x) = a^x \ln(a)$
  - $f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$
  - $f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$

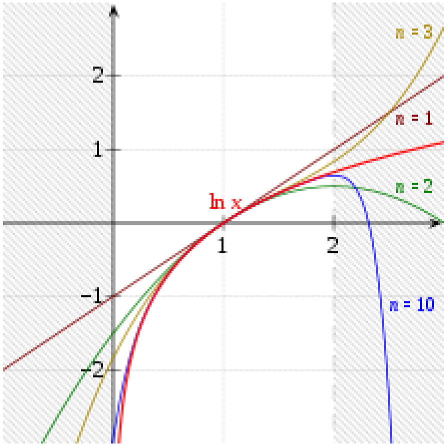
Ableitungsregeln

- **Konstante**: $f(x) = c \implies f'(x) = 0$
  - **Beispiel**: $f(x) = 5 \implies f'(x) = 0$
- **Potenzregel**: $f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$
  - **Beispiel**: $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$
  - **Differentiation von Polynomen**: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \implies p'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$
    - **Beispiel**: $f(x) = 3x^2 + 2x + 5 \implies f'(x) = 6x + 2$
- **Faktorregel**: $f(x) = cx^n \implies f'(x) = ncx^{n-1}$
  - **Beispiel**: $f(x) = 2x^3 \implies f'(x) = 6x^2$
- **Summenregel / Differenzregel**: $f(x) = g(x) \pm h(x) \implies f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
  - **Beispiel**: $f(x) = x^3 + x \implies f'(x) = 3x^2 + 1$
- **Produktregel**: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

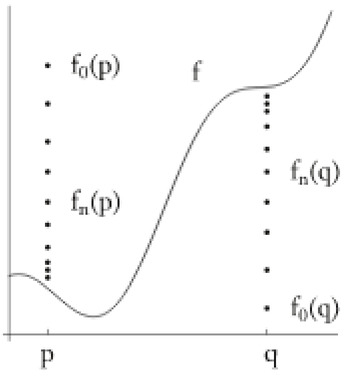
- **Beispiel**: $f(x) = x^3 \cdot x^5 \implies f'(x) = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4 = 8x^7$
- **Quotientenregel**: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
  - **Beispiel**: $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x} \implies f'(x) = \frac{\cos(x)e^x - \sin(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{e^x}$
- **Kettenregel**: $(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  - **Beispiel**: $f(x) = (x^3+1)^2 \implies f'(x) = 2(x^3+1) \cdot 3x^2$
- **Ableitung von Umkehrfunktionen**: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
  - **Beispiel**: $\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$

Differentiation von Reihen

- **Funktionenfolge**: eine Funktionenfolge ist eine Folge, deren einzelne Glieder **Funktionen** sind

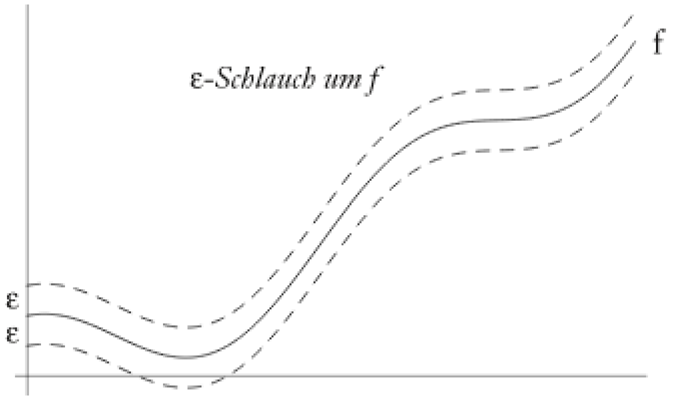


- **punktweise Konvergenz**: eine Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion f, wenn für alle Stellen x aus dem *gemeinsamen* Definitionsbereich die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert



  - **formal**: $\forall \epsilon > 0 \; \forall x \in D \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
  - **(!)** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **punktweise** gegen f, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
  - **Beispiel**: $f_n : x \mapsto x^n$ konvergiert in $[0,1]$ punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$
    - $\forall x \in [0,1) : \lim_{n\to\infty} x^n = 0$
    - $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

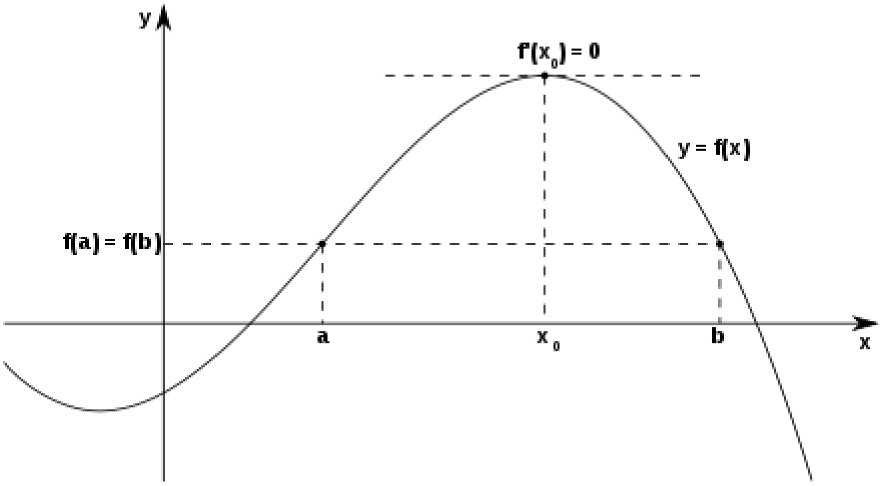
- **[gleichmäßige Konvergenz]**: punktweise Konvergenz + alle **Funktionen** f_n befinden sich in einem beliebig schameln ϵ-Schlauch um f



  - **formal**: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
  - **(!)** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen f, falls $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in D\} = 0$
  - **(!)** gleichmäßige Konvergenz gegen f impliziert punktweise Konvergenz gegen f
  - falls f_n noch für alle n auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist, ist f integrierbar und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
- **Weierstraßsches Majorantenkriterium (Weierstraßscher M-Test)**: falls $|f_n(x)| \leq M_n$ gilt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergiert, dann **konvergiert** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **absolut und gleichmäßig**
  - **Beispiel**: $|f_n(x)| \leq n^{-2},\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \in (0,1)$
    - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert absolut und gleichmäßig
- **Satz für punktweise konvergente Funktionsreihen**: konvergiert die aus einer Funktionenfolge gebildete Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, ist die Reihe **punktweise konvergent** gegen die Grenzfunktion f
- **Satz für Differenzierbarkeit von Funktionsreihen**: sind für $f_k : D \to \mathbb{R}$ die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ punktweise und $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ gleichmäßig konvergent, so ist f in D differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$

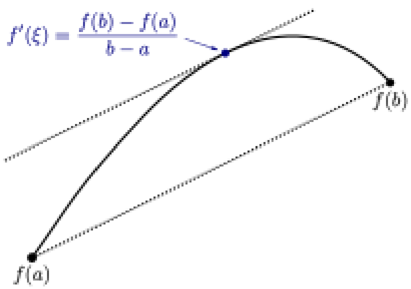
Anwendungen der Ableitung

- **Satz von Rolle**: auf dem Graphen der Funktion f gibt es zwischen zwei **Kurvenpunkten mit übereinstimmenden Funktionswerten** mindestens eine Stelle, an der die **Steigung gleich null** ist



- **formal**: seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist; wenn $f(a) = f(b)$, so gibt es eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$
- **Beweis**:
  - **Fall 1**: f konstant (trivial)
    - ist f konstant, gilt $f'(x) = 0$ für **alle** $x \in (a, b)$
  - **Fall 2**: f nicht konstant
    - laut **Satz von Maximum und Minimum** nimmt f in $[a, b]$ sowohl Maximum, als auch Minimum an
    - das Maximum / Minimum muss von $f(a) = f(b)$ **verschieden** sein, sonst wäre f konstant $\Rightarrow$ es existiert mind. ein Extremum an einer beliebigen Stelle $x_0 \in (a, b)$ (1)
    - f ist auf (a, b) **differenzierbar** $\implies$ f ist in x_0 **differenzierbar**
    - notwendiges Kriterium für **Extrema** $\implies$ $f'(x_0) = 0$ (2)
    - (1), (2) $\implies$ $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$, QED

- **Mittelwertsatz**: die **Sekantensteigung** tretet an mindestens einer Stelle zwischen a und b als **Steigung der Tangente** am Funktionsgraph auf



  - **formal**: seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist, dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  - **Beweis**:
    - **Idee**: suche geeignete Hilfsfunktion
    - sei $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Hilfsfunktion, definiert als $H(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
    - f ist auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar (1)

- H ist eine Komposition aus f und $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ (2)
- (1), (2) $\implies$ H ist auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar
- $H(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)$
  $= f(a)$
  $= f(b) - (f(b) - f(a))$
  $= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = H(b)$ (3)
- (1), (2), (3) $\implies$ laut Satz von Rolle existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $H'(x_0) = 0$
- $H'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$
  $\implies f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, QED

- **Monotoniekriterium**: für eine in (a,b) differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (stetig) gilt...
  - $f' \geq 0$ auf $(a,b) \iff f$ **monoton steigend** auf $[a,b]$
  - $f' \leq 0$ auf $(a,b) \iff f$ **monoton fallend** auf $[a,b]$
  - $f' > 0$ auf $(a,b) \implies f$ **streng monoton steigend** auf $[a,b]$
  - $f' < 0$ auf $(a,b) \implies f$ **streng monoton fallend** auf $[a,b]$

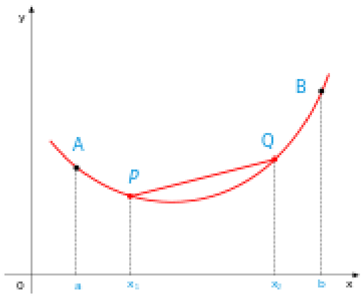
Grenzwertbestimmung mit L'Hôpital

- **Regel von de L'Hospital**: existiert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so ist $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
  - **Anwendungsfälle**: unbestimmte Ausdrücke ($\frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$...)
  - **Beweis** (Sonderfall)
    - seien f, g stetig differenzierbar in x_0 mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$, dann...
    - $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$
      $= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}{\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)} = \frac{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
  - **TIPP**: man kann Funktionen der Form $h(x) = f(x)g(x)$ evtl. auf $h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ umformen, um L'Hôpital anzuwenden (siehe Bsp. 3)
  - **Beispiel 1**: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\tan(x)}$
    - setze $f(x) = \cos(x) - 1$ und $g(x) = \tan(x)$
    - $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)} = \frac{0}{0}$ ↯
    - $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0} -\sin(x)\cos^2(x) = 0$
  - **Beispiel 2**: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$
    - setze $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \ln(x)$
    - $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ↯
    - $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$
  - **Beispiel 3**: $\lim_{x\to 0} x\ln(x)$

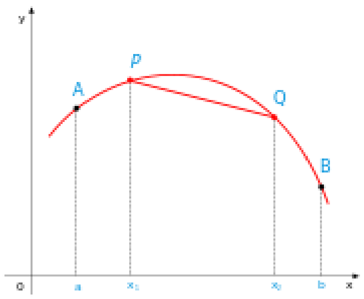
- umformen: $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
- setze $f(x)=\ln(x)$ und $g(x)=\frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

Konvexität und die Jensensche Ungleichung

- **Begriffe**:
  - f ist **zweimal differenzierbar** $\iff$ f **differenzierbar**, f' **differenzierbar**
  - f ist **stetig differenzierbar** $\iff$ f **differenzierbar**, f' **stetig**
  - f ist **zweimal stetig differenzierbar** $\iff$ f **zweimal differenzierbar**, f'' **stetig**
- konvexe und konkave Funktionen:
  - **konvex**: eine reelwertige Funktion heißt **konvex**, wenn ihr Graph **unterhalb jeder Verbindungsstrecke** zweier seiner Punkte liegt



    - **formal**: eine Funktion $f: C \to R$, wobei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, heißt konvex, wenn für alle $x, y \in C$ und für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
    - f ist **konvex**, falls $-f$ **konkav** ist
    - **Satz**: ist $f:(a,b)\in\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit nicht-negativer zweiter Ableitung, so ist f konvex
    - **Beispiele**: $\exp(x), x^4 \ldots$
  - **konkav**: eine reelwertige Funktion heißt **konkav**, wenn ihr Graph **oberhalb jeder Verbindungsstrecke** zweier seiner Punkte liegt

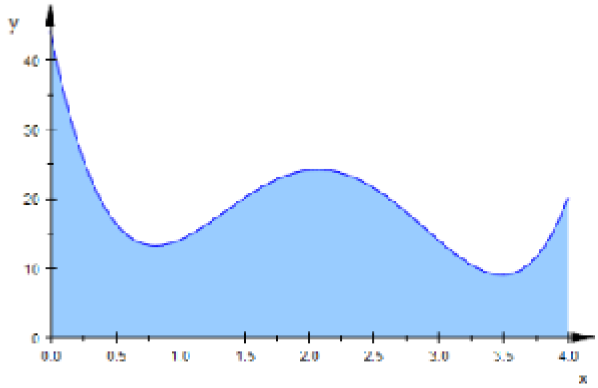


    - **formal**: eine Funktion $f: C \to R$, wobei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konkave Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, heißt konkav, wenn für alle $x, y \in C$ und für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

        - f ist **konkav**, falls $-f$ **konvex** ist
        - **Beispiele**: $\ln(x), -x^2 \dots$
    - ist die jeweilige Ungleichung **strikt**, so heißt f **streng konvex** bzw. **streng konkav**
- **Kriterium für Konvexität bzw. Konkavität**: ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, gilt...
    - f konvex auf $[a,b] \iff f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$
    - f konkav auf $[a,b] \iff f''(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$
    - *strikt konvex bzw. strikt konkav, wenn die Ungleichungen strikt sind*
- **Jensensche Ungleichung**: für eine konvexe Funktion f und nichtnegative λ_i mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ gilt $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$
    - für konkave Funktionen geht die Ungleichung in die umgekehrte Richtung
    - **Beweis** hier (siehe Induktion)

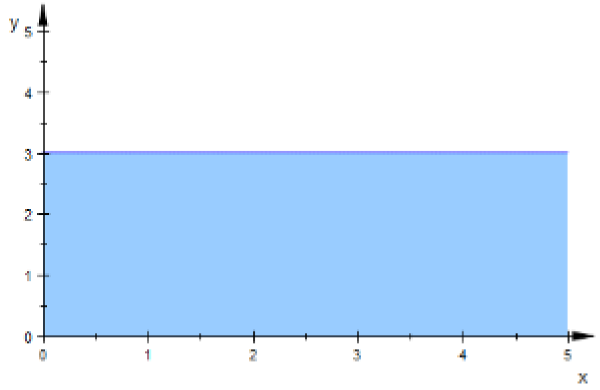
Das Integral

- **Integralrechnung**: die Integralrechnung bestimmt anschaulich **Flächeninhalte**, die durch **gekrümmte Linien** (e.g. Funktionen oberhalb der x-Achse) in einem Intervall $[a,b]$ begrenzt sind
    - **Schreibweise**: $\int_a^b f(x)dx$

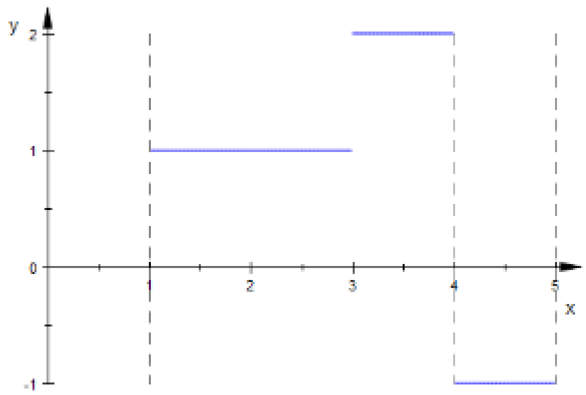


- **konstante Funktionen**: $f(x) = c$
    - **Integral einer konstanten Funktion**: $\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot c$ (Flächeninhalt des Rechtecks unter / über dem Graphen)
        - $c > 0$: Ergebnis positiv

- $c < 0$: Ergebnis negativ



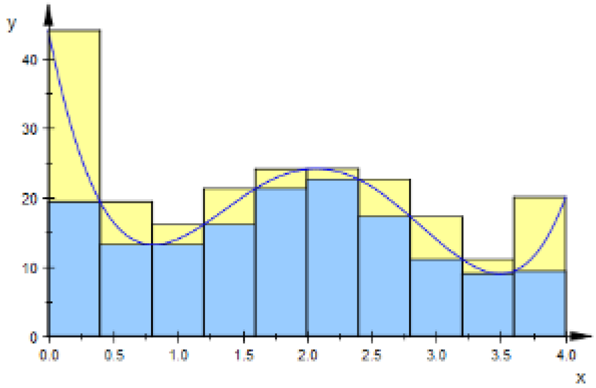
- [Treppenfunktionen](): eine Treppenfunktion nimmt nur endlich viele Funktionswerte an und ist stückweise konstant, $f(x) = c_i$ falls $x \in (x_{i-1}, x_i)$
  - **formal**: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn $\exists t_0, t_1, ..., t_n : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ und $\exists c_1, ..., c_n \; \forall x \in (t_{i-1}, t_i), i = 1, ..., n : f(x) = c_i$ (Funktionswerte an den Stützstellen sind beliebig, aber reell)
  - **Integral einer Treppenfunktion**: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ mit $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$
  - **Beispiel**:
    - $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{wenn } 3 < x \leq 4 \\ -1 & \text{wenn } 4 < x \leq 5 \end{cases}$
    - $\int_1^5 f(x)dx = 1(3-1) + 2(4-3) + (-1)(5-4) = 3$



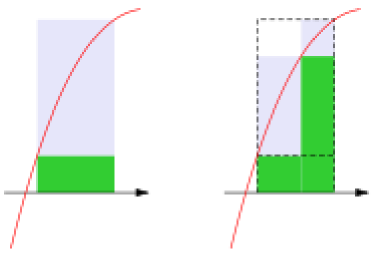
Allgemeine beschränkte Funktionen, Riemann- und Darbouxintegral

- [riemannsches Integral]() **(Unter- / Obersumme)**: approximiere f durch Treppenfunktionen, dann berechne das Integral durch Rechtecksummen
  - **Idee**:
    - zerlege das Integrationsintervall in kleine Stücke und den gesuchten Flächeninhalt in senkrechte Streifen
    - die **Untersumme** besteht aus der Summe der **größten** Rechtecke ausgehend von der x-Achse, die den Graphen **nicht schneiden**

- die **Obersumme** besteht aus der Summe der **kleinsten** Rechtecke ausgehend von der x-Achse, die im Intervall **den ganzen Graphen umfassen**



- **formal**:
  - sei $Z = x_0, x_1, ..., x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ in n Teile
  - **Untersumme**: $U(Z) = U_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} ((x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x))$
  - **Obersumme**: $O(Z) = O_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)\right)$
- **(!)** es gilt stets $U_Z(f) \leq O_Z(f)$, man betrachtet den **Fehler** als $O_Z(f) - U_Z(f)$
- je **feiner** die Zerlegung, desto **genauer** wird das Ergebnis ($U_Z(f) \leq U_{Z'}(f) \leq O_{Z'}(f) \leq O_Z(f)$)

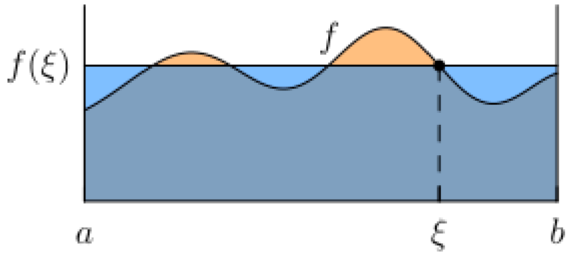


- **Darboux-Integral** **(Unter- / Oberintegral)**: das Darboux-Integral von f entspricht einer "unendlich feinen" Zerlegung (Infimum der Obersummen / Supremum der Untersummen)
  - **Unterintegral**: $U(f) = \sup\{U_Z(f) : \text{Z ist Zerlegung von [a,b]}\}$ (Untersumme **wächst**)
  - **Oberintegral**: $O(f) = \inf\{O_Z(f) : \text{Z ist Zerlegung von [a,b]}\}$ (Obersumme **senkt**)
  - **(!)** es gilt stets $U(f) \leq O(f)$
  - **(!)** f heißt **integrierbar**, falls $U(f) = O(f)$ mit $\int_a^b f(x)dx = U(f) = O(f)$
  - ist f integrierbar und (Z^n) eine Folge von Zerlegungen, dessen Fehler beim genaueren Approximieren gegen 0 strebt, gilt $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_{Z^n}(f) = \lim_{n\to\infty} O_{Z^n}(f)$
- **Riemannsches Kriterium**: eine beschränkte Funktion f ist **genau dann integrierbar**, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine **Zerlegung** Z von $[a, b]$ mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \epsilon$ gibt
  - **formal**: f integrierbar $\iff \forall \epsilon > 0\ \exists Z \in Z[a, b] : O_Z(f) - U_Z(f) < \epsilon$
  - **Beweis**:
    - $\Longleftarrow$ $(O_Z(f) - U_Z(f) < \epsilon)$

        - $U_Z(f) \leq O_Z(f)$ **gilt** stets, siehe oben (1)
        - $U_Z(f) \leq U(f)$, da $U_Z(f)$ für $n \to \infty$ stets **größer** wird (2)
        - $O(f) \leq O_Z(f)$, da $O_Z(f)$ für $n \to \infty$ stets **kleiner** wird (3)
        - $U(f) \leq O(f)$ **gilt** stets, siehe oben (4)
        - (1), (2), (3), (4) $\implies U_Z(f) \leq U(f) \leq O(f) \leq O_Z(f)$ (5)
        - (5) $\implies O(f) - U(f) \leq O_Z(f) - U_Z(f)$ (**Fehler** offensichtlich kleiner)
        - $O_Z(f) - U_Z(f) < \epsilon$ (laut Voraussetzung) $\implies O(f) = U(f)$ (da ϵ **beliebig** (klein) ist)
    - $\impliedby$ (f integrierbar)
        - f integrierbar $\implies O(f) = U(f)$ (laut Definition)
        - $\exists Z_1, Z_2$, so dass...
            - $U_{Z_1}(f) > U(f) - \frac{\epsilon}{2} = O(f) - \frac{\epsilon}{2}$
            - $O_{Z_2}(f) < O(f) + \frac{\epsilon}{2} = U(f) + \frac{\epsilon}{2}$
        - sei $Z = Z_1 \cup Z_2$ eine gemeinsame **Verfeinerung**, dann...
            - $U_Z(f) > U_{Z_1}(f) > O(f) - \frac{\epsilon}{2}$ (Untersumme offensichtlich größer)
            - $O_Z(f) < O_{Z_2}(f) < O(f) + \frac{\epsilon}{2}$ (Obersumme offensichtlich kleiner)
        - $O_Z(f) - U_Z(f) < (O(f) + \frac{\epsilon}{2}) - (O(f) - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$
- **gleichmäßige Stetigkeit**: für eine **gleichmäßig stetige** Funktion f muss gelten, dass der Abstand **beliebiger** Paare von Funktionswerten **kleiner als ein beliebig vorgegebener Maximalfehler** ϵ ist, solange die Argumente hinreichend nah beieinanderliegen (δ).
    - **anschaulich**: sei ein Rechteck mit Höhe 2ϵ und Breite 2δ um einen Punkt; der Graph muss **komplett im Inneren**, aber **nie direkt ober- oder unterhalb des Rechtecks** verlaufen
    - **formal**: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- **Satz für Integrierbarkeit von beschränkten, stetigen Funktionen**: jede **beschränkte stetige Funktion** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist **integrierbar**
- **Satz für Integrierbarkeit von beschränkten, monotonen Funktionen**: jede **beschränkte monotone Funktion** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist **integrierbar**
- **Eigenschaften des Integrals**: seien f, g integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann...
    - **Linearität (1)**: $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
    - **Linearität (2)**: $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
    - **Monotonie**: $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
    - **Zerlegbarkeit (1)**: $a < c < b \implies \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
    - **Zerlegbarkeit (2)**: $a \leq b \implies \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
        - damit gilt die Zerlegbarkeit $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ für **alle** $a, b, c \in \mathbb{R}$

- **Integral im selben Punkt**: $\int_a^a f(x)dx = 0$

- **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: bei einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liegt der **Durchschnittswert** im **Bereich der Werte**, welche die Funktion annimmt
  - **genauer**: es gibt ein ξ, so dass $f(\xi)$ gleich dem durchschnittlichen Funktionswert von f ist



  - **formal**: falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass $f(\xi)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$

- **Fundamentalsatz der Analysis / Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung**: Ableiten bzw. Integrieren ist jeweils die **Umkehrung** des anderen
  - **erster Teil (Existenz von Stammfunktionen, Zusammenhang von Ableitung und Integral)**: ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelwertige stetige Funktion auf einem reellen Intervall I, so ist für jedes $c \in I$ (c **beliebig**) die Integralfunktion $F : I \to \mathbb{R}, F(x) = \int_c^x f(t)dt$ **differenzierbar** und eine **Stammfunktion** (bis auf eine additive Konstante eindeutig) von f, d.h. für alle $x \in I$ gilt $F'(x) = f(x)$
    - **Beweis**:
      - *zu zeigen*: $\exists F'(x) \equiv \exists \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ und $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$
      - sei $x \in I$ beliebig, aber fest, und $h > 0$ (klein genug), so dass $x + h \in I$, dann...
      - $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x))$
        $= \frac{1}{h}(\int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt)$
        $= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$
      - laut **Mittelwertsatz** existiert $\xi_h \in (x, x+h)$, so dass...
      - $f(\xi_h)(x + h - x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$
        $\Rightarrow hf(\xi_h) = \int_x^{x+h} f(t)dt$
        $\Rightarrow f(\xi_h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$
      - für $h \to 0$ gilt $\xi_h \to x$ (1)
      - f ist **stetig** (laut Voraussetzung) (2)
      - (1), (2) $\implies \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x) \implies F'(x) = f(x)$
  - **zweiter Teil (Berechnung eines Integrals)**: ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
    - **Schreibweise**: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
    - **Beweis**:

        - sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$
        - setze für $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ (laut Definition) $c = a$, so dass $F(a) = 0$ und $F(b) = \int_a^b f(x)dx$
        - damit gilt $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ für **diese (!)** Stammfunktion
        - alle anderen Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine **Konstante**, die bei der Subtraktion **verschwindet**
        - folglich ist der Satz für **alle** Stammfunktionen beweisen (Eindeutigkeit der Stammfunktion)
    - **Zusammenfassung**: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f und $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

Integrationsregeln

- **Potenzregel**: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
    - **Beispiel**: $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$
- **Faktorregel**: $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$
    - **Beispiel**: $\int 2\cos(x)dx = 2 \int \cos(x)dx = 2\sin(x) + C$
- **Summen- / Differenzregel**: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
    - **Beispiel**: $\int (3x^2 + 4x^3)dx = \int 3x^2 dx + \int 4x^3 dx = x^3 + x^4 + C$
- partielle Integration **(Produktintegration)**: sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$, so gilt...
    - **bestimmte Integrale**:
        - $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$
        - $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
    - **unbestimmte Integrale**:
        - $\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
        - $\int f(x)'g(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
    - **Beweis**:
        - seien f, g stetig differenzierbare Funktionen in $[a, b]$
        - laut Produktregel gilt $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
        - folglich ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
        - laut Fundamentalsatz der Analysis gilt $\int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = [f(x)g(x)]_a^b$
        - laut Linearität des Integrals gilt $\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b$
        - Umformen: $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$, QED

- **TIPP**: wähle für f' einen Term, der sich bei der Integration nicht (e^x) oder nur unwesentlich (trig. Funktionen) verändert (siehe Bsp. 1)
- **TIPP**: wenn nur ein Term im Integrand mit unbekannter Stammfunktion steht, füge 1 hinzu und integriere parallel (siehe Bsp. 2)
- **TIPP**: wenn nach mehreren Schritten das ursprüngliche Integral wiederkehrt, kann dies durch Äquivalenzumformung bestimmt werden (siehe Bsp. 3)
- **Beispiel 1**: $\int_0^1 xe^x dx$
  - sei $f'(x) = e^x, g(x) = x$
  - daraus folgt $f(x) = e^x, g'(x) = 1$, so dass...
  - $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 1$
- **Beispiel 2**: $\int \ln(x)dx$
  - füge Faktor 1 hinzu: $\int 1\ln(x)dx$, so dass $f'(x) = 1, g(x) = \ln(x) \implies f(x) = x, g'(x) = \frac{1}{x}$
  - $\int 1\ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + C$
- **Beispiel 3**: $\int \sin(x)\cos(x)dx$
  - sei $f(x) = \cos(x), g'(x) = \sin(x)$
  - daraus folgt $f'(x) = -\sin(x), g(x) = -\cos(x)$, so dass...
  - $\int \sin(x)\cos(x)dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)dx$
  - addiere das Ausgangsintegral auf beiden Seiten: $2\int \sin(x)\cos(x)dx = -\cos^2(x)$
  - dividiere durch 2: $\int \sin(x)\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$
  - erhalte (eine) allg. Stammfunktion: $\int \sin(x)\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$

- **Substitutionsregel**: sind $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar, so gilt...
  - $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$
  - **Beweis**:
    - sei F eine Stammfunktion von f
    - laut Kettenregel gilt $(F \circ g)'(x) = [F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$
    - folglich ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$
    - laut Fundamentalsatz der Analysis gilt $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$, QED
  - **TIPP**: wenn die Ableitung nicht offensichtlich da ist, forme Integral um und nutze Linearität (siehe Bsp. 2)
  - **REZEPT - $\frac{dt}{dx}$-Variante**:
    - setze t' mit $\frac{dt}{dx}$ gleich
    - löse für dx, dann substituiere im Integral

- **Beispiel 1**: $\int_4^9 (x^2-4)^3 \cdot 2x dx$
  - $t = x^2 - 4, t' = 2x$
  - Formel anwenden: $\int_{4^2-4}^{9^2-4} t^3 dt = [\frac{1}{4}t^4]_{4^2-4}^{9^2-4} = \dots$
  - evtl. Rücksubstitution: $[\frac{1}{4}(x^2-4)]_4^9 = \dots$
- **Beispiel 2**: $\int_4^9 (x^2-4)^3 \cdot 40x dx$
  - umschreiben: $\int_4^9 (x^2-4)^3 \cdot 2 \cdot 20x dx$
  - Linearität: $20 \cdot \int_4^9 (x^2-4)^3 \cdot 2x dx$
  - analog wie Beispiel 1, nur mit 20 multipliziert...
- **Beispiel 3**: $\int_4^9 (x^2-4)^3 \cdot 40x dx$ mit $\frac{dt}{dx}$-Variante
  - $t = x^2 - 4$
  - $t' = 2x = \frac{dt}{dx} \mid \cdot dx$
    $= 2x dx = dt \mid : 2x$
    $= dx = \frac{dt}{2x}$
  - folgt: $\int_4^9 (x^2-4)^3 40x dx = \int_{4^2-4}^{9^2-4} t^3 40 \cancel{x} \frac{dt}{2\cancel{x}} = \int_{4^2-4}^{9^2-4} t^3 20 dt = \dots$

- **uneigentliche Integrale**: uneigentliche Integrale sind Integrale, die einen **endlichen Wert** haben, bei denen aber entweder eine **Integrationsgrenze im Unendlichen** liegt oder die Funktion an der Integrationsgrenze eine **Singularität** hat
  - **erster Fall**: ist $f : [a, \infty)$ eine Funktion, die auf jedem endlichen Intervall $[a, M]$ integrierbar ist, definiert man...
    - $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$ (falls der Limes existiert)
    - $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^a f(x)dx$ (falls der Limes existiert)
    - **Beispiel**: $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2} dx$
      - $\int_1^M \ln(x)\frac{1}{x^2}dx = [-\ln(x)\frac{1}{x}]_1^M + \int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \frac{-\ln(M)}{M} - \frac{1}{M} + 1 \to 1$
  - **zweiter Fall**: ist $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a+\epsilon, b]$ für jedes $\epsilon \in (0, b-a)$, definiert man $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ (falls der Limes existiert)
  - $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$ (hängt **nicht** von c ab!)
    - **Beispiel**: $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$
      - $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$
        $= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx$
        $= \lim_{M\to\infty}[\arctan(x)]_{-M}^0 + \lim_{M\to\infty}[\arctan(x)]_0^M$
        $= \lim_{M\to\infty}(-\arctan(M)) + \lim_{M\to\infty} \arctan(M)$
        $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Integrationstabelle

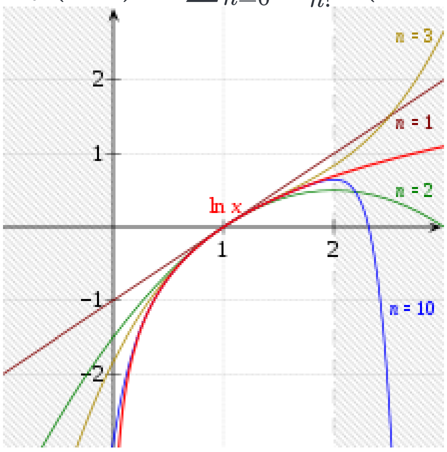
$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x+C$
x	$\frac{1}{2}x^2+C$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x+C$

Potenzreihen und Taylorentwicklungen

- **Potenzreihen**: **unendliche Reihen** einer bestimmten Form mit einer **beliebigen Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und einem **Entwicklungspunkt** a heißen Potenzreihen
  - $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$
  - **Beispiele**:
    - $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
    - $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
    - $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
    - $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ für $-1 < x \leq 1$
    - $(x+1)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$ für $\alpha \in \mathbb{N}$ (siehe binomische Reihe)
      - **Reminder**: $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$
- **Taylor-Formel (Satz von Taylor)**: eine Funktion kann in der Umgebung eines Punktes durch **Taylorpolynome** angenähert werden
  - **Taylorpolynom**: $T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

- **Restglied** (**Lagrange-Form**): $R_n f(x;a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für ξ zwischen a und x
- **Satz (Taylorformel mit Integralrestglied)**: $f(x) = T_n f(x;a) + R_n f(x;a)$
  - $f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

- **Taylorreihe**: Darstellung einer unendlich oft differenzierbaren Funktion in der Umgebung einer Stelle durch eine Potenzreihe, die der Grenzwert der Taylorpolynome ist
  - $Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$



Operationen mit Potenzreihen

- seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$
  - **Addition**: $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x-x_0)^n$
  - **skalare Multiplikaton**: $c \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)(x-x_0)^n$
  - **Differentiation**: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n$
  - **Integration**: $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}(x-x_0)^n}{n} + C$

Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

- **innerer Punkt (mehrdimensional)**: ein Element $x \in D$ heißt innerer Punkt von $D \subseteq \mathbb{R}^d$, falls es einen Ball um x gibt, der vollständig in D liegt
  - **formal**: $\exists \epsilon > 0 \ : \ B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : ||x-y|| < \epsilon\} \subseteq D$
  - **Abstand (mehrdimensional)**: $||x-y|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_d-y_d)^2}$
  - $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, falls alle Punkte in D innere Punkte sind

- **Differenzierbarkeit (mehrdimensional)**: eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt in a **partiell** nach der i-ten Komponente **differenzierbar**, falls der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)}{h}$ existiert
  - **Beispiel (2 Parameter)**:
    - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$
    - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$

- **partielle Ableitung**: die Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach **einem** dieser Argumente (während man die anderen als Konstanten betrachtet) heißt partielle Ableitung
    - **Schreibweise**: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ oder $\partial_{x_i} f(a)$ (partielle Ableitung von f nach der i-ten Komponente x_i)
    - **Beispiel**: sei $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$
        - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$
        - $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$
    - ist f in a *differenzierbar*, dann ist f in a partiell nach *allen* Komponenten *differenzierbar*
    - ist f überall in D partiell nach allen Komponenten *differenzierbar* und sind die partiellen Ableitungen in D *stetig*, so ist f in D *stetig differenzierbar*
    - **zweite partielle Ableitung**: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ (zuerst nach x_i, dann x_j)
        - **Beispiel**: $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + y^2$
            - $\partial_x f(x, y) = 6x + 4y$ bzw. $\partial_y f(x, y) = 4x + 2y$
            - $\partial_x \partial_x(x, y) = 6$
            - $\partial_y \partial_x(x, y) = 4$
            - $\partial_x \partial_y(x, y) = 4$
            - $\partial_y \partial_y(x, y) = 2$
        - falls alle zweiten partiellen Ableitungen existieren und *stetig* sind, ist f *zweimal stetig differenzierbar*
- **stetig differenzierbar (mehrdimensional)**: für $D \subseteq R^n$ offen heißt f **stetig diferenzierbar**, falls f überall in D **differenzierbar** ist und f' eine **stetige** Funktion ist
- **Gradient / Gradientenvektor**: der Vektor bestehend aus den partiellen Ableitungen von f für jeden Parameter heißt Gradientenvektor
    - **formal**: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$
    - **Beispiel**: sei $f(x) = 2x^2 - y^2$
        - $\nabla f = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \end{pmatrix}$
- **Hesse-Matrix**: die Hesse-Matrix besteht aus allen zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion f
    - **formal**: $H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$
    - **Beispiel**: sei $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
        - $H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

- **Satz von Schwarz**: bei mehrfach stetigen differenzierbaren Funktionen mehrerer Variablen ist die Reihenfolge der Variablen der partiellen Ableitungen nicht entscheidend
  - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$
- **REZEPT: Bestimmung von mehrdimensionalen Extremstellen** (vereinfacht, lokal):
  1. berechne partielle Ableitungen von f, also ∇f
  2. bestimme die kritischen Stellen von f (Nullstellen von ∇f), also $\nabla f = 0^v$
  3. bestimme Hesse-Matrix H_f
  4. setze kritische Stellen in H_f ein und bestimme Definitheit
     - $H_f(x_0)$ negativ definit $\implies$ x_0 lokales Maximum
     - $H_f(x_0)$ positiv definit $\implies$ x_0 lokales Minimum
     - $H_f(x_0)$ indefinit $\implies$ x_0 Sattelpunkt
     - $H_f(x_0)$ semidefinit $\implies$ unbestimmt

Summary by Flavius Schmidt, ge83pux, 2024.
https://home.in.tum.de/~scfl/
Images from Wikimedia.