PERSONAL - Lineare Algebra für Informatik

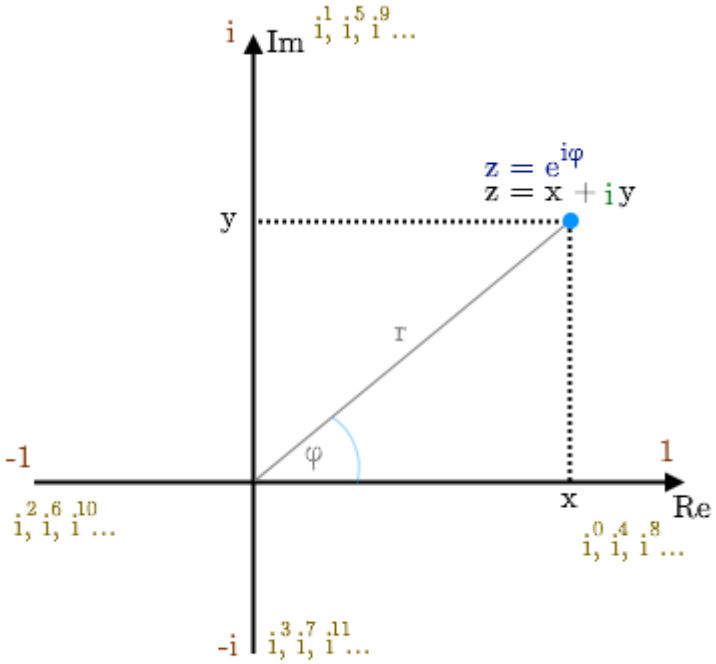
- Gruppen und Ringe
  - Gruppen
  - Ringe
- Vektorräume
  - Körper
  - Vektorräume
  - Basen von Vektorräumen
  - Linearkombinationen
  - Lineare Unabhängigkeit
- Orthogonalität
  - Skalarprodukt
  - Länge, Abstand, Winkel, Orthogonalität
  - Orthogonalsystem, -basis; Orthonormalsystem, -basis
  - Normieren eines Vektors
  - Orthogonale Zerlegung von v längs a (p. 167)
  - Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahren
  - Die orthogonale Projektion
  - Das lineare Ausgleichsproblem
- Lineare Abbildungen
  - Bild, Kern, Dimensionsformel
  - Koordinatenvektoren
- Restklassen, Modulorechnen
- Lineare Codes

Übersicht - Zahlengruppen

- $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$: natürliche Zahlen
  - $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$: natürliche Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$: ganze Zahlen
- $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen (*e.g. Bruchzahlen*)
- $\mathbb{R}$: reele Zahlen (*irrationale Zahlen*)
- $\mathbb{C}$: **komplexe Zahlen**
  - **Zahlen vom Typ:** $z = a + bi$
    - $re(z) = a$ (*Realteil,* $a \in \mathbb{R}$) und $im(z) = b$ (*Imaginärteil,* $b \in \mathbb{R}$)

- $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$
  - $x^2 + a = 0$
  - $x^2 = -a$
    - $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{a} = \pm i\sqrt{a}$

Komplexe Zahlen



- **komplexe Zahl**: $z = a + bi$
- **konjugiert komplexe Zahl**: $\overline{z} = a - bi$ (*gespiegelt an der reelen Achse*)
- **Absolutbetrag / Länge / Norm**: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z * \overline{z}}$
- **Dreiecksungleichung**: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Operationen

- **Addition und Subtraktion**:
  - *karthesische Darstellung verwenden*
  - $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i * (b_1 \pm b_2)$
    - z.B. $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 4 + 5i$
      - $z_1 + z_2 = (2 + 4) + i * (-3 + 5) = 6 + 2i$
      - $z_1 - z_2 = (2 - 4) + i * (-3 - 5) = -2 - 8i$
      - $\overline{z_1} = 2 + 3i$
      - $\overline{z_2} = 4 - 5i$

        - $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
        - $|z_2| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$
- **Multiplikation**:
    - *Polardarstellung verwenden*
        - Längen **multiplizieren sich**
        - Winkel **addieren sich**
        - $z_1 * z_2 = r_1 * r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i * sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 * r_2 * e^{i*(\varphi_1 + \varphi_2)}$
    - *in Koordinatendarstellung*: $z_1 * z_2 = (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) + i * (a_1 * b_2 + a_2 * b_1)$
        - z.B. $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 4 + 5i$
            - $z_1 * z_2 = (2 * 4 - (-3) * 5) + i * (2 * 5 + 4 * (-3)) = 23 - 2i$
- **Division**:
    - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 * a_2 + b_1 * b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i * \frac{a_2 * b_1 + a_1 * b_2}{a_2^2 + b_2^2}$
    - $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
    - $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- **Sonderregeln**:
    - $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
    - $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$
    - $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$
    - $z * \overline{z} = |z|^2$
        - z.B. $z = 1 + i, \overline{z} = 1 - i \rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- **Gleichheit zweier komplexen Zahlen**:
    - $a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d$
- **Invertieren einer komplexen Zahl**:
    - *Multiplizieren mit dem konjugiert Komplexen des Nenners*
        - z.B. $\frac{1}{2+3i} * \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

Potenzen von i

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

Darstellungsformen von komplexen Zahlen

- **karthesisches Koordinatensystem**:
  - $z = a + bi$
    - $re(z) = a$ (*Realteil,* $a \in \mathbb{R}$)
    - $im(z) = b$ (*Imaginärteil,* $b \in \mathbb{R}$)
- **Polarkoordinaten**:
  - **Eulersche Identität**: $z = e^{i*\varphi} = \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$
  - **Polardarstellung mit** $r = |z|, r > 0$: $z = r * e^{i*\varphi} = r * (\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$

Umrechnungsformeln

- **Karthesisches Koordinatensystem** $\rightarrow$ **Polardarstellung**:
  - *gegeben*: $a + ib$
    - $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
    - $\varphi = \arccos(\frac{a}{r})$ für $b \geq 0$
    - $\varphi = -\arccos(\frac{a}{r})$ für $b < 0$
- **Polardarstellung** $\rightarrow$ **Karthesisches Koordinatensystem**
  - *gegeben*: (r, φ)
    - $a = r * \cos\varphi$
    - $b = r * \sin\varphi$

Additionstheoreme

- $-\sin(\varphi) = \sin(-\varphi)$
- $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
- $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) * \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) * \sin(\varphi_2)$
- $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin(\varphi_1) * \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) * \sin(\varphi_2)$
- $e^{i*\varphi_1} * e^{i*\varphi_2} = e^{i*(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Gleichungen mit komplexen Zahlen

- **Ausklammern und Nullprodukt**
  - z.B. $z^3 + z = 0$
    - $z(z^2 + 1) = 0 \rightarrow z_1 = 0$
    - $z^2 + 1 = 0 \rightarrow z^2 = -1 \rightarrow z_{2,3} = \pm i$
    - $\mathbb{L} = \{0, -i, i\}$
- **mit** z **konjugiert**:
  - z.B. $(z - 1)^2 = (z + 1)^2 + z * \overline{z}$

        - $z^2 - 2zi + i^2 = z^2 + 2zi + i^2 + z * \overline{z}$
        - $-2zi = 2zi + z * \overline{z}$
        - $0 = 4zi + z * \overline{z}$
        - $0 = z(4i + \overline{z})$
            - $z_1 = 0$
            - $4i + \overline{z} = 0 \rightarrow \overline{z} = -4i \rightarrow z_2 = 4i$
- **quadratische Gleichung**:
    - z.B. $z^2 + 2z + 3 = 0$
        - $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i * \sqrt{2}$
            - $z_1 = -1 + i * \sqrt{2}$
            - $z_2 = -1 - i * \sqrt{2}$
    - z.B. $z^2 + 2z - i = 0$
        - $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + i}$
            - $u^2 = 1 + i$ mit $u: 22,5^\circ$ ($45^\circ/2$, da $|1 + i| = \sqrt{2}$) $\rightarrow |u| = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/4} \rightarrow u = 2^{1/4} * e^{i*22.5}$
- **Substitution**:
    - z.B. $z^4 + 2z^2 + 3 = 0$
        - sei $z^2 = u$
        - dann gilt: $u^2 + 2u + 3 = 0 \rightarrow ... \rightarrow u_{1,2} = 1 \pm i * \sqrt{2}$
        - Rücksubstitution: $z^2 = 1 + i * \sqrt{2} \rightarrow z = \sqrt{1 + i * \sqrt{2}}$ (*Polardarstellung hier einsetzen...*)

Potenzieren von z (Formel von de Moivre)

- $(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))^n = \cos(n * \varphi) + i * \sin(n * \varphi)$
    - z.B. $(\cos(\frac{\pi}{3}) - i * \sin(\frac{\pi}{3}))^{400} = \cos(400 * \frac{\pi}{3}) - i * \sin(400 * \frac{\pi}{3})$

Einheitswurzeln

- *gesucht*: alle Lösungen von $x^n = 1 \in \mathbb{C}$
    - **n-te Einheitswurzeln**: $\Omega_n := \{e^{ik\frac{2\pi}{n}} \mid k = 0, 1, ..., n-1\} = \{\cos(k\frac{2\pi}{n}) + i * \sin(k\frac{2\pi}{n}) \mid k = 0, 1, ..., n-1\}$
- *gesucht*: alle Lösungen von $x^n = z \in \mathbb{C}$
    - finde eine konkrete Lösung $x \in \mathbb{C}$ mit $x^n = z$ über Polarkoordinaten
        - $x = \sqrt[n]{r} * e^{i*\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r} * (\cos(\frac{\varphi}{n}) + i * \sin(\frac{\varphi}{n}))$
    - multipliziere dieses x mit allen n-ten Einheitswurzeln

- $z_k = \sqrt[n]{r} * e^{i * \frac{\varphi + k * 2\pi}{n}}$ mit $k = 0, 1, ..., n-1$
- *alt.* $z_k = \sqrt[n]{r} * (\cos(\frac{\varphi + k * 2\pi}{n}) + i * \sin(\frac{\varphi + k * 2\pi}{n}))$

Berechnung von komplexen Wurzeln

1. komplexe Zahl unter der Wurzel in Polardarstellung umformeln
   1.1 für Zahlen $\in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $\varphi = 0$
   1.2 für Zahlen $\in \mathbb{R}_{< 0}$ ist $\varphi = \pi$
2. wende Formel $z^n = r * e^{i(\varphi + 2\pi k)}$
   2.1. $z = \left(r * e^{i(\varphi + 2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} * e^{i * \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k)} = \sqrt[n]{r} * e^{i * (\frac{\varphi + 2\pi k}{n})}$
   2.2 **Radius** wird **potenziert**, **Winkel** wird **multipliziert**

- z.B. $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$
  - $r = 2$, $\varphi = \arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$
  - $z^4 = 2 * e^{\frac{\pi}{3}i}$
  - beide Seiten mit $\sqrt[4]{\cdots}$ rechnen $\rightarrow$ Radius hoch $1/4$, Winkel mal $1/4$
    - $z_0 = \sqrt[4]{2} * e^{\frac{1}{4}\frac{\pi}{3}i} = \sqrt[4]{2} * e^{\frac{\pi}{12}i}$
    - analog z_1, z_2, z_3

Wichtige sin- und cos-Werte

Winkel (deg)	Winkel (rad)	sin	cos
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0

BONUS: Umschreiben in Exponentialdarstellung

- Sei $z = 10 * (\cos(\frac{\pi}{3}) - i * \sin(\frac{\pi}{3}))$
- es gilt:
  - $-\sin(\varphi) = \sin(-\varphi)$
  - $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
- daraus folgt:
  - $z = 10 * (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i * \sin(-\frac{\pi}{3}))$ $\rightarrow$ Polardarstellung

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

- m Gleichungen, n Variablen
  - **Koeffizientenmatrix** A
    $$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$
  - **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A \mid b)$
    $$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Gaussches Eliminationsverfahren

- LGS auf **Zeilenstufenform** bringen, ohne die Lösungsmenge zu verändern
- **elementare Zeilenumformungen**:
  - Vertauschen zweier Zeilen
  - Multiplikation einer Zeile mit Faktor $\lambda \neq 0$
  - Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen
- mögliche Formen der letzten Zeile(n) nach Anwendung des Gauß-Algorithmus:
  - $(0 \cdots 0 \mid x)$ mit $x \neq 0$: **nicht** lösbar
  - $(0 \cdots 0 \mid 0)$: lösbar

Rang einer Matrix

- $rg(m)$: **Anzahl der nicht-null-Zeilen** nach dem Anwenden des Gauß-Algorithmus
  - alt. **Anzahl linear unabhängiger Spalten / Zeilen** von A
- ein LGS ist genau dann lösbar, wenn $rg(A) = rg(A \mid b)$; dann gilt:
  - Anzahl der frei wählbaren Variablen = $n - rg(A)$ (n - *Anzahl der Variablen*)
  - LGS ist eindeutig lösbar, wenn $n = rg(A)$ bzw. $n = rg(A \mid b)$
    $$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$
  - LGS hat ∞ Lösungen, wenn $n > rg(A)$ bzw. $n > rg(A \mid b)$
    $$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
- **Zeilenrang**: Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A
- **Spaltenrang**: Anzahl linear unabhängiger Spalten von A
- **Zeilenrang = Spaltenrang = Rang**

Homogene und inhomogene LGS

- **homogene LGS**
  - $Ax = 0$, oder $b = 0$
    - hat immer mindestens eine Lösung, die *triviale Lösung 0*
  - $(A \mid 0)$: das zu $(A \mid b)$ gehörige homogene LGS
    $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 \end{array}\right)$
- **inhomogene LGS**
  - $Ax = b$, oder $b \neq 0$
- ein LGS hat immer entweder...
  - ...keine Lösung (*inhomogenes LGS*)
  - ...genau eine Lösung (*inhomogenes LGS, homogenes LGS*)
  - ...unendlich viele Lösungen (*inhomogenes LGS, homogenes LGS*)
- ist x_0 eine Lösung eines inhomogenen LGS ($x \in L_{A,b}$), dann gilt $L_{A,b} = x_0 + L_{A,0}$

Rechnen mit Matrizen

- **Matrix**: rechteckiges Zahlenschema $A \in K^{m \times n}$ (K - Körper)
  - m Zeilen, n Spalten
  - $a_{i,j} \in A$: Eintrag an Zeile i, Spalte j
    - z.B. $a_{2,3} = 6$ in $K^{2 \times 3}$ (*Index fängt bei 1 an*)
      $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- **Gleichheit von Matrizen**: gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten und an jeder Stelle müssen dieselben Koeffizienten liegen

Rechenoperationen

- **Transponieren**
  - sei $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$, dann gilt $A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$
    - z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
  - **Regeln**:

    - $(A+B)^T = A^T + B^T$
    - $(A^T)^T = A$
    - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
    - für $A, B : A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times p}$ gilt $(AB)^T = B^T A^T$
  - **symmetrische Matrix (nur quadratisch)**: $A^T = A$
    - z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- **Addition**
  - für $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in K^{m \times n}$ gilt $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$
    - *Koeffizienten an selber Stelle addieren,* ***Dimensionen der beiden Matrizen müssen gleich sein***
  - **Regeln (abelsche Gruppe)**:
    - *Abgeschlossenheit*: $A + B \in K^{m \times n}$
    - *Assoziativität*: $(A + B) + C = A + (B + C)$
    - *neutrales Element*: $\exists 0 : A + 0 = A = 0 + A$
    - *Inverses*: $\forall A \exists B : A + B = 0 = B + A$ $(B = -A)$
    - *Kommutativität*: $A + B = B + A$
- **skalare Multiplikation**
  - für $\mu, \lambda \in K; A, B \in K^{m \times n}$ gilt $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$
    - *jeder Koeffizient wird mit Lambda multipliziert*
  - **Regeln**:
    - *Assoziativität*: $(\mu\lambda)A = \mu(\lambda A)$
    - *Distributivität*: $(\mu + \lambda)A = \mu A + \lambda A$
    - *II. Distributivitätsgesetz*: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
    - *neutrales Element*: $1 * A = A$
- **Multiplikation**
  - $(z_1 ... z_n) * \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} z_i s_i$ (*Zeile muss so lang wie Spalte sein!*)
  - gilt nur für $A, B : A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times p}$
  - **Regeln**:
    - Multiplikation ist **nicht** kommutativ und bildet nicht eine Gruppe (*da es nicht unbedingt ein Inverses gibt*)

        - *Abgeschlossenheit*: $AB \in K^{n \times n}$
        - *Assoziativität*: $(AB)C = A(BC)$
        - *neutrales Element*: $\exists E_n : E_n A = A = AE_n$
        - *Distributivität*: $(A + B)C = AC + BC$ und $A(B + C) = AB + AC$
- **Invertieren**
    - *Voraussetzung*: $A \in K^{n \times n}$ quadratisch
        - eine Matrix mit einer Nullzeile ist **nie invertierbar**
    - *Inverses bestimmen*:
        - stelle $(A|E_n)$ auf
        - wende Gauß-Algorithmus an, um E_n auf der linken Seite herauszubekommen
        - *Ergebnis*: $(E_n|A^{-1})$
    - Regeln:
        - $AA^{-1} = E_n$
        - $ABB^{-1}A^{-1} = E_n$
        - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
        - $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

Elementarmatrizen

- **Permutationsmatrix**
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
- **Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$**
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\varphi & 2\varphi & 2\varphi \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
- **Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile**
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 11 & 11 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$ (*+ 3 * III*)

Kern einer Matrix

- **Lösungsmenge** des **homogenen linearen Gleichungssystems** $Ax = 0$
    - *anders*: womit muss man eine Matrix A multiplizieren, damit man den **Nullvektor** bekommt?
    - *formell*: $\ker(A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$
- **Eigenschaften**:
    - der Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$

- $\dim(\ker(A)) = n - rg(A)$
- *für quadratische Matrizen*: $\dim(\ker(A))$ = Anzahl der **Nullzeilen** in **Zeilenstufenform**

- **REZEPT: Bestimmen des Kerns**: (*p. 157*)
  - löse das homogene LGS $(A \mid 0)$
  - gebe Lösung als Basis an, da die Lösungsmenge ein Vektorraum ist

- **Beispiel**:
  $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - die Abbildung f bildet genau die Vektoren der Form $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ auf den Nullvektor ab
  - folglich ist $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Determinante einer quadratischen Matrix

- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$
  - $\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + ... + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{n1})$
- **im Fall** $n = 2$: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- **im Fall** $n = 3$: $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$ (*Regel von Sarrus*)
- **allgemeine Berechnung für quadratische Matrizen** $A = (a_{ij})$:
  - **Entwicklung nach j-ter Spalte**: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
  - **Entwicklung nach i-ter Zeile**: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
- **REZEPT: Determinante bestimmen für Matrizen mit** $n \geq 3$:
  1. hat A zwei gleiche Zeilen oder Spalten bzw. zwei Zeilen oder Spalten, die Vielfache voneinander sind, gilt $\det(A) = 0$
  2. hat A Blockdreiecksgestalt $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, dann $\det(A) = \det(B)\det(D)$
  3. wenn es eine Zeile bzw. Spalte mit vielen Nullen gibt, dann entwickle nach dieser Zeile bzw. Spalte
  4. wenn nicht, dann erzeuge Nullen durch Umformungen und entwickle nach dieser Zeile oder Spalte
  5. beginne von vorne
- **Eigenschaften**:
  - $\det(A) = \det(A^T)$

- $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A^k) = (\det(A))^k$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- ist A obere oder untere Dreiecksmatrix, so gilt $\det(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$
  - $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ bzw. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- hat A Blockdreiecksgestalt mit quadratischen Matrizen B und D und passenden 0 und C, so gilt $\det(A) = \det(B)\det(D)$
  - $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ bzw. $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$
- eine Matrix ist genau dann **invertierbar**, wenn $\det(A) \neq 0$
- ist A invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- wenn A zwei gleiche Spalten oder gleiche Zeilen hat (*oder Linearkombinationen davon*), gilt $\det(A) = 0$
- unter elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen:
  - **Vertauschen** zweier Zeilen oder Spalten **verändert das Vorzeichen** der Determinante
    - $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \end{pmatrix}$
  - **Multiplikation** einer Zeile oder Spalte mit λ bewirkt eine **Multiplikation der Determinante mit** λ
    - $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \end{pmatrix}$
  - **Addition** des λ-Fachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile oder Spalte **ändert** die Determinante **nicht**

- $\det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_k + \lambda z_l \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \end{pmatrix}$

Orthogonale Matrizen

- eine **symmetrische** Matrix A ist orthogonal, wenn $A^T A = E_n$
- **Eigenschaften**:
  - A ist **invertierbar**
  - $A^{-1} = A^T$
  - die **Spalten** bzw. **Zeilen** von A bilden eine **ONB** des $\mathbb{R}^n$
  - $\det(A) = \pm 1$
  - A ist **längenerhaltend**, d.h. $||Av|| = ||v||$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$
  - das **Produkt** orthogonaler Matrizen ist **orthogonal**

Darstellungsmatrizen

- seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit...
  - $\dim(V) = n$ und $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V
  - $\dim(W) = m$ und $C = (c_1, ..., c_m)$ eine Basis von W
- ist $f : V \to W$ linear, so nennt man die $m \times n$-Matrix ${}_C M(f)_B = ({}_C f(b_1), ..., {}_C f(b_n))$ die **Darstellungsmatrix** von f bzgl. B und C
  - **Satz**: in der i-ten Spalte der Darstellungsmatrix steht der Koordinatenvektor des Bildes des i-ten Basisvektors
- zu jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ gibt es eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit $f_A(v) = Av$
  - die Matrix A erhält man durch $A = {}_{E_m} M(f)_{E_n} = (f(e_1), ..., f(e_n))$
- **Eigenschaften**:
  - f ist injektiv $\iff \ker(A) = \{0\}$
  - f ist surjektiv $\iff \operatorname{rg}(A) = m$
  - f ist bijektiv $\iff A$ invertierbar
- *Beispiel für* $\mathbb{R}^3$:
  - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x \end{pmatrix}$

- $E_2 = \left(b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), E_3 = \left(c_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
- *dann gilt*: $f(b_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = c_1 + c_2 + 2c_3 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $f(b_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = c_1 - c_2 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$
- ${}_{E_3}M(f)_{E_2} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}$

Darstellungsmatrix der Verkettungen

- für lineare Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow U$ mit den Basen $B = (b_1, ..., b_n) \subseteq V$, $C = (c_1, ..., c_m) \subseteq W$ und $D = (d_1, ..., d_r) \subseteq U$ und den Darstellungsmatrizen ${}_CM(f)_B$ und ${}_DM(g)_C$ gilt:
  - ${}_DM(g \circ f)_B = {}_D M(g)_C \ {}_CM(f)_B$

[Basistransformation]

- **gegeben**:
  - lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$
  - zwei Basen von V
    - $B = (b_1, ..., b_n)$
    - $B' = (b'_1, ..., b'_n)$
  - zwei Basen von W
    - $C = (c_1, ..., c_m)$
    - $C' = (c'_1, ..., c'_m)$
- dann gilt die **Basistransformationsformel**:
  - ${}_{C'}M(f)_{B'} = {}_{C'}M(\mathrm{Id})_C \ {}_CM(f)_B \ {}_BM(\mathrm{Id})_{B'}$
  - ${}_{C'}M(\mathrm{Id})_C = ({}_{C'}c_1, ...{}_{C'}c_m) \in K^{m \times m}$
  - ${}_{B'}M(\mathrm{Id})_B = ({}_{B'}b_1, ...{}_{B'}b_n) \in K^{n \times n}$
- **(!) Sonderfall**: für $f : K^n \rightarrow K^n$ mit $f(v) = Av$ gilt...
  - ${}_BM(f)_B = B^{-1}AB$
  - multipliziere A mit jedem Basisvektor b_i und trage Koordinatenvektor in Ergebnismatrix ein
- **REZEPT: Bestimmen einer Darstellungsmatrix** ${}_BM(f)_B$
  - **gegeben**: lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ mit geordneter Basis $B = (b_1, ..., b_n)$

- **Fall $V = K^n$ und $B = E_n$**: $A = (f(e_1), ..., f(e_n))$
- bestimme für jedes $i = 1, ..., n$ den **Koordinatenvektor** ${}_B f(b_i) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)^T$ aus $f(b_i) = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ und erhalte $A = ({}_B f(b_1), ..., {}_B f(b_n))$
- falls eine Darstellungsmatrix ${}_C M(f)_C$ bekannt ist, so gilt $A = S^{-1}\ {}_C M(f)_C\ S$ mit $S = {}_C M(\mathrm{Id})_B$

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisieren

- **gegeben**: quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $Av = \lambda v, v \neq 0, \lambda \in K$
  - $v \in K \backslash \{0\}$: **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ
  - λ: **Eigenwert** von A mit Eigenvektor $v \in K \backslash \{0\}$
- ist λ ein Eigenwert von A, so nennt man den Untervektorraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$ den **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ und $\dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$ die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ
  - $\mathrm{geo}(\lambda) = \dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$
  - in einer symmetrischen Matrix stehen die Eigenräume senkrecht aufeinander
- **Diagonalisieren einer Matrix**:
  - eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $B \in K^{n \times n}$ gibt, so dass $D = B^{-1}AB$ eine **Diagonalmatrix** (*Diagonalform zu* A) ist
  - $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$
  - $B = (b_1, ..., b_n)$ (*geordnete Basis*)
- **das charakteristische Polynom einer Matrix**:
  - $\chi_A = \det(A - \lambda E_n)$
  - *zerfällt in Linearfaktoren*: $(\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1} ... (\lambda_r - \lambda)^{\nu_r}$
  - λ_i sind die verschiedenen Eigenwerte von A
  - man nennt die Potenz ν_i die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i, geschrieben $\mathrm{alg}(\lambda_i) = \nu_i$
  - wenn A eine symmetrische Matrix ist, dann ist $rg(A)$ gleich der **Anzahl der nicht-nullen Eigenwerten**
- **TIPP**: Eigenwerte für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:
  - $\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p}$
    - m (*mean*) = $\frac{Spur(A)}{2}$
    - p (*product*) = $\det(A)$
- **Kriterium zur Diagonalisierbarkeit**:
  - eine quadratische Matrix A ist **genau dann** diagonalisierbar, wenn das **charakteristische Polynom** χ_A in **Linearfaktoren zerfällt** und $\mathrm{alg}(\lambda) = \mathrm{geo}(\lambda)$ für **jeden Eigenwert** λ gilt

- jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar

- **REZEPT: Diagonalisieren einer Matrix** $A \in K^{n \times n}$
  - bestimme das charakteristische Polynom χ_A und zerlege es in Linearfaktoren
    - es gilt $\nu_1 + ... + \nu_r = n$
    - es sind λ_i die verschiedenen Eigenwerte mit $\text{alg}(\lambda_i) = \nu_i$
    - ist χ_A nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegbar, dann ist A **nicht diagonalisierbar**
  - bestimme zu jedem Eigenwert λ_i den Eigenraum $\text{Eig}_A(\lambda_i)$ durch Angabe einer Basis B_i
    - $\text{Eig}_A(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i E_n) = \langle B_i \rangle$
    - es gilt $|B_i| = \text{geo}(\lambda_i)$
    - gilt $\text{geo}(\lambda_i) \neq \text{alg}(\lambda_i)$ für ein i, dann ist A **nicht diagonalisierbar**
  - es gilt $B = \bigcup B_i$, erhalte dann $D = B^{-1}AB$
    - alt. berechne Ab_i mit D als Koordinatenvektoren davon

- **Eigenschaften**:
  - $\det(A) = \prod \lambda_i$ (*Produkt der Eigenwerte*)
  - $\text{Spur}(A) = \sum \lambda_i$ (*Summe der Eigenwerte* = *Summe der Elemente auf der Diagonale*)

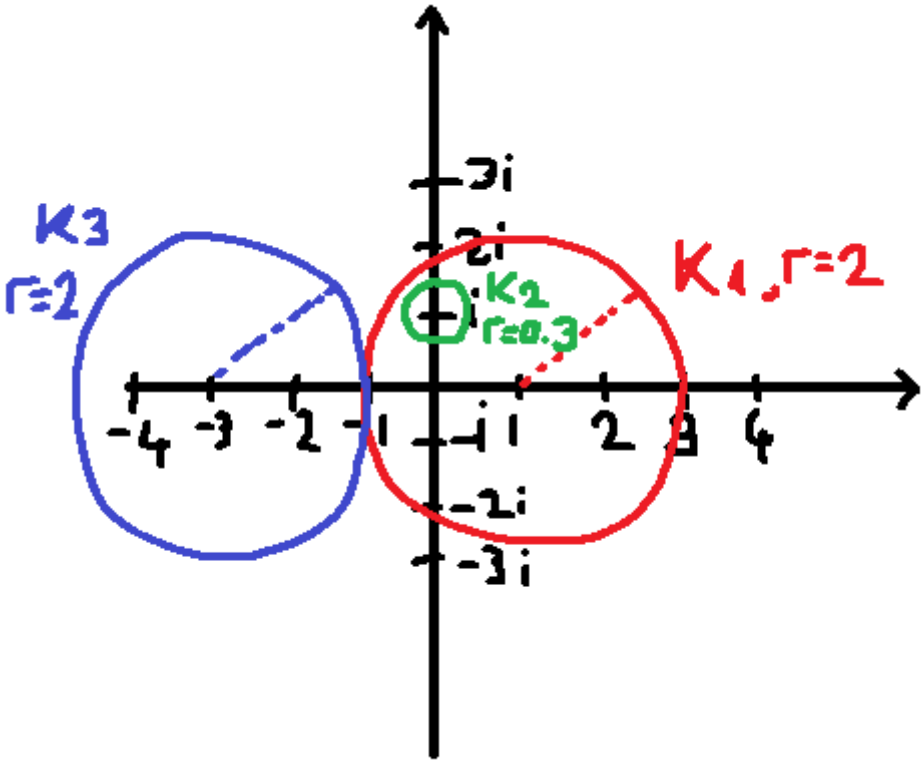
Orthogonales Diagonalisieren

- ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle, symmetrische Matrix mit $A^T = A$, dann gilt:
  - A ist diagonalisierbar
  - alle Eigenwerte von A sind reell
  - Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander (bzg. SSP $\langle v, w \rangle = v^T w$)
  - die A diagonalisierende Matrix B kann orthogonal gewählt werden, d.h. $D = B^{-1}AB = B^T AB$
    - wähle ONB B so, dass die Vektoren innerhalb der Basen B_i auch orthogonal (*und normiert*) zueinander sind (*Kreuzprodukt*)

Gerschgorinkreise

- die n Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ liegen in den n **Gerschgorinkreisen**:
  - $K_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|\}$
- wenn 0 kein EW sein kann (*0 nicht in einem Gerschgorinkreis enthalten*), dann ist A **invertierbar**
- *Beispiel*:
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0.1 & i & 0.2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 0+2\}$
- $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq 0.1+0.2\}$
- $K_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| \leq |-1|+1\}$



Singulärwertzerlegung

- $A = U\Sigma V^T$
- **REZEPT: Bestimmen der Singulärwertzerlegung**:
  - bestimme Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von $A^T A$ und sortiere die ersten r absteigend ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r$)
  - bestimme **ONB** $V = (\nu_1, ..., \nu_n)$ aus Eigenvektoren von $A^T A$
  - setze $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ und erhalte daraus Σ
  - bestimme $u_1, ..., u_r$ aus $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A\nu_i$ soweit möglich und ergänze sie falls $r < m$ zu einer ONB bzw. orthogonalen Matrix $U = (u_1, ..., u_m)$

Definitheit symmterischer Matrizen

- **allgemein**:
  - **positiv definit**, wenn $v^T Av > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
  - **negativ definit**, wenn $v^T Av < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
  - **positiv semidefinit**, wenn $v^T Av \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
  - **negativ semidefinit**, wenn $v^T Av \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
  - **indefinit**, wenn es Vektoren mit $v^T Av > 0$ und $w^T Aw < 0$ existieren
- **Eigenwertkriterium**:

- **positiv definit**, wenn alle Eigenwerte **positiv** sind
- **negativ definit**, wenn alle Eigenwerte **negativ** sind
- **positiv semidefinit**, wenn alle Eigenwerte **positiv oder null** sind
- **negativ semidefinit**, wenn alle Eigenwerte **negativ oder nul**l sind
- **indefinit**, wenn A **positive und negative Eigenwerte** hat

- **REZEPT: Trick für 2×2-Matrizen der Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:**
  - bestimme $\det(A) = ac - b^2$ und $\text{Spur}(A) = a + c$
    - wenn $\det(A) < 0$, so ist A indefinit
    - wenn $\det(A) = 0$ und $\text{Spur}(A) \geq 0$, so ist A positiv semidefinit
    - wenn $\det(A) = 0$ und $\text{Spur}(A) \leq 0$, so ist A negativ semidefinit
    - wenn $\det(A) > 0$ und $\text{Spur}(A) > 0$, so ist A positiv definit
    - wenn $\det(A) > 0$ und $\text{Spur}(A) < 0$, so ist A negativ definit

Gruppen und Ringe

Gruppen

- eine Menge G mit **innerer Verknüpfung** $G \times G \to G$ heißt **Gruppe**, falls folgendes gilt:
  1. *Abgeschlossenheit*: $G \times G \to G$
  2. *Assoziativität*: $\forall\ a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
  3. *neutrales Element*: $\exists\ e \in G : e \circ a = a = a \circ e$ (*eindeutig!*)
  4. *Inverses*: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G : a \circ b = e = b \circ a$ mit $b = a^{-1}$ (*eindeutig!*)
- eine Gruppe heißt **abelsch**, wenn diese **kommutativ** ist ($\forall a, b \in G : a + b = b + a$)
- **"Gruppen-Sudoku-Regel"**: in den Spalten und Zeilen einer Gruppentafel kann jedes Element **jeweils nur genau einmal** stehen
- **REZEPT:** eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt **Untergruppe** von G (*geschrieben $U \leq G$*), falls folgendes gilt:
  1. *U Teilmenge von G*: $U \subseteq G$
  2. *neutrales Element von G in U*: $e \in U$ (*"nicht leer"*)
  3. *Abgeschlossenheit bzgl. U*: $\forall u, v \in U : u \circ v \in U$
  4. *Abgeschlossenheit bzgl. inverses Element*: $\forall u \in U : u^{-1} \in U$
- **die von Elementen erzeugten Untergruppen**:
  - sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, dann gilt $\langle a \rangle = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\} \leq G$
    - *anders*: $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$
    - $\langle a \rangle \subseteq G$
    - $e \in \langle a \rangle : e = a^0$

    - $a^k, a^l \in \langle a \rangle \implies a^k a^l = a^{k+l} \in \langle a \rangle$
    - $\forall\ a^k\ \exists\ a^{-k} : a^k a^{-k} = a^{k-k} = a^0 = e$
  - **Ordnung** eines Elements $a \in G$: $|\langle a \rangle| = O(a)$
    - $O(a) = n$, wenn $|\langle a \rangle| = n \in \mathbb{N}$, sonst ∞
    - *anders*: $|\langle a \rangle| = |\{e, a^1, ..., a^{n-1}\}| = n$ mit n als kleinste natürliche Zahl wofür $a^n = e$
    - **Satz über die Ordnung von Gruppenelementen**: für eine Gruppe G mit neutralem Element e gilt für ein beliebiges Element a...
      - wenn $O(a) = \infty$, dann gilt $a^i \neq a^j\ \forall i \neq j$
      - wenn $O(a) \in \mathbb{N}$, so gilt $O(a) = n$ mit n als kleinste natürliche Zahl wofür $a^n = e$
    - **Ordnung bestimmen**: multipliziere x mit sich selbst, bis e erreicht wird, die Potenz ist dann die Gruppenordnung
- **Satz von Lagrange**: $|U|$ teilt $|G|$ ($|U|$ ist ein Teiler von $|G|$, bzw. $|G|$ ist ein Vielfaches von $|U|$, bzw. $\exists n \in \mathbb{N} : |U| * n = |G|$)
- **Satz von Euler**: $\forall a \in G : a^{|G|} = e$

Ringe

- eine **Menge** R mit zwei **Verknüpfungen** $+, \cdot$ heißt **Ring**, falls folgendes gilt:
  1. $(R, +)$ ist eine **abelsche Gruppe**
  2. *Multiplikation ist abgeschlossen*: $\forall a, b \in R : a \cdot b \in R$
  3. *Multiplikation ist assoziativ*: $\forall a, b, c \in R : a(bc) = (ab)c \in R$
  4. *Distributivgesetze*: $\forall a, b, c \in R$ gilt...
     4.1: $(a + b)c = ac + bc$
     4.2: $a(b + c) = ab + ac$
- R ist **kommutativ**, wenn $\forall a, b \in R : ab = ba$
- R ist ein **Ring mit Einselement**, falls $\forall a \in R\ \exists e : ae = a = ea$
- *Beispiele*:
  - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: kommutativer Ring mit Einselement 1
  - $(\mathbb{R}, +, \cdot)$: kommutativer Ring mit Einselement 1
  - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$: kommutativer Ring mit Einselement 1
  - $(K^{n \times n}, +, \cdot)$: *nicht* kommutativer Ring mit Einselement E_n
  - $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$: kommutativer Ring mit Einselement $\overline{1}$
- **Einheitengruppe eines Rings mit Einselement**:
  - sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1, dann ist die **Einheitengruppe** $R^\times = \{a \in R | \exists b \in R : ab = 1 = ba\}$ die **Menge aller multiplikativ invertierbaren Elemente**
  - $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \backslash \{0\}, \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \backslash \{0\}, \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \backslash \{0\}$

- z.B. $\mathbb{Z}_6^\times = \{\overline{1}, \overline{5}\}$
  - wenn das Produkt zweier Faktoren $\overline{0}$ ist, ist keiner dieser Faktoren invertierbar: $\overline{2} * \overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} * \overline{3} = \overline{0}$

Vektorräume

Körper

- ein **Ring** $(K, +, \cdot)$ mit **Einselement** 1 heißt **Körper**, falls folgendes gilt:
  1. $(K, +)$ abelsche Gruppe (*neutrales Element 0*)
  2. $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe (*neutrales Element 1*)
  3. *Distributivgesetze*: $\forall a, b, c \in K : a(b + c) = ab + ac \wedge (a + b)c = ac + bc$
- *Beispiele*: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Vektorräume

- K sei ein Körper, dann heißt V ein K-Vektorraum (*über* K), falls folgendes gilt:
  1. $(V, +)$ ist eine **abelsche Gruppe**
  2. $\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in K$:
     2.1. *Distributivität I*: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
     2.2. *Distributivität II*: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
     2.3. *Assoziativität*: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
     2.4. *neutrales Element*: $1v = v$ für $1 \in K$
- *Beispiele*:
  - K^n (*Vektoren*)
  - $K^{m \times n}$ (*Vektorraum der Matrizen*)
  - $K[x] := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n | a_i \in K, n \in N\} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (*Vektorraum der Polynome für eine Variable* x)
- **Regeln**:
  - $0 * v = 0$ (*Nullskalar * $v \in V$ = Nullvektor*)
  - $\lambda * 0 = 0$ (*Skalar * Nullvektor = Nullvektor*)
  - $\lambda * v = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ v = 0$
- **Untervektorräume**:
  - **REZEPT**: eine Teilmenge $U \subseteq V$, wobei V ein K-Vektorraum ist, heißt **Untervektorraum / Unterraum** von V (*geschrieben* $U \leq V$), wenn folgendes gilt:
    1. *Teilmengenbeziehung*: $U \subseteq V$ (*impl.*)
    2. *neutrales Element*: $0 \in U$
    3. *Abgeschlossenheit*: $u, v \in U \implies u + v \in U$
    4. $\lambda \in K, u \in U \implies \lambda u \in U$

- wenn $U, W \leq V$, dann $U \cap W \leq V$

Basen von Vektorräumen

- ist V ein K-Vektorraum, so nennt man $B \subseteq V$ eine Basis von V, falls folgendes gilt:
  - B ist linear unabhängig
  - B erzeugt V
- *Beispiel*:
  - $E_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$, linear unabhängig, $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- **Regeln**:
  - jeder Vektorraum hat eine Basis
  - $B \subseteq V$ Basis von $V \iff B$ ist ein **minimales Erzeugendensystem** von $V \iff B$ ist eine **maximale linear unabhängige Teilmenge** von V
  - jede linear unabhängige Teilmenge von V kann man zu einer Basis ergänzen
  - jedes Erzeugendensystem von V kann man zu einer Basis verkürzen
  - ist B eine Basis von V, so kann man jedes $v \in V$ auf genau eine Weise bezüglich B darstellen als Linearkombination ($v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$)
  - je zwei Basen B_1, B_2 von V haben die gleiche Mächtigkeit $|B_1| = |B_2|$
  - **Dimension** $\dim(v) = |B|$: Mächtigkeit einer (jeder) Basis B von V
    - $\dim(\mathbb{R}^n) = n, \dim(K^{m \times n}) = m * n, \dim(K[x]) = \infty, \dim(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = \infty, \dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$
  - ist V ein K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:
    - jede **linear unabhängige Menge** mit n Elementen ist eine **Basis**
    - jedes **Erzeugendensystem** von V mit n Elementen ist eine **Basis**
    - jede **Menge** mit mehr als n Vektoren ist stets **linear abhängig**
- **REZEPT: Basis aus Menge von Vektoren anzugeben (Beispiel)**:
  - *gegeben*: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- *LGS*: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → *Basis*: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (*Vektoren, außer Nullzeile*) → *ergänzt*: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (*Zeilenstufenform*)

Linearkombinationen

- Vektor, der sich durch **gegebene Vektoren** unter **Verwendung der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation** ausdrücken lässt
  - z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$
    - *selbe Regeln wie bei LGS*: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \infty$ Lösungen
  - z.B. $\mathbb{R}[x]$ (*Polynome*), $p_1 = x + 1, p_2 = x - 1, p = 2x + 1$
    - $\lambda_1(x + 1) + \lambda_2(x - 1) = 2x + 1 \to (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 - \lambda_2) = 2x + 1$
    - *Polynome sind gleich, wenn die Koeffizienten gleich sind*: $\lambda_1 + \lambda_2 = 2, \lambda_1 - \lambda_2 = 1$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 0.5$
  - $\nexists \lambda_1, \lambda_2 : \exp = \lambda_1 \sin + \lambda_2 \cos$
- **Erzeugnis** von X:
  - sei V ein K-Vektorraum mit $X \subseteq V, X \neq \emptyset$, dann gilt $\langle x \rangle = lin(x) = span(x) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^i | v_i \in X, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$ (*alle Linearkombinationen von Elementen aus* X)
    - $\langle x \rangle \leq V$
    - $x \subseteq \langle x \rangle$
    - $\langle x \rangle = \bigcap_{x \leq U \leq V} U$
    - $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$
  - z.B. $\mathbb{R}^n = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \mathbb{R}[x] = \langle 1, x, x^2, ... \rangle$
- **REZEPT: Darstellen eines Vektors als Linearkombination**:
  - mache den Ansatz $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = v$ in den Unbestimmten $\lambda_1, ..., \lambda_n$
    - im Fall $V = K^n$ liefert dies ein LGS
    - im Fall $V = K^{m \times n}$ liefert dies einen Koeffizientenvergleich von Matrizen

        - im Fall $V = K[x]$ liefert dies einen Koeffizientenvergleich von Polynomen
        - im Fall $V = K^M$ liefert dies einen Wertevergleich von Funktionen
    - wenn die Gleichung eine Lösung hat, so ist v eine Linearkombination
        - wenn nicht, so ist v keine Linearkombination und breche ab
    - löse das Gleichungssystem

Lineare Unabhängigkeit

- eine **Familie von Vektoren** eines Vektorraums heißt **linear unabhängig**, wenn sich der **Nullvektor nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt**, in der **alle Koeffizienten der Kombination auf den Wert null gesetzt werden**
    - *anders*: keiner der Vektoren lässt sich als Linearkombination der anderen Vektoren der Familie darstellen
- **REZEPT: Bestimmen, ob n Vektoren linear unabhängig sind**:
    - $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$
    - mittels LGS (*Gauß-Algorithmus*) lösen
        - $\exists!$ die Nulllösung $\forall i : \lambda_i = 0 \rightarrow v_1, ...v_n$ **linear unabhängig** (*homogenes LGS*)
        - $\exists$ mindestens eine Lösung, wofür $\lambda_i \neq 0 \rightarrow v_1, ...v_n$ **linear abhängig**
- **REZEPT: Bestimmen einer Basis aus einem Erzeugendensystem**
    - **gegeben**: Erzeugendensystem X eines Vektorraums V
        - prüfe, ob X linear unabhängig ist
            1. wenn ja, dann ist X eine Basis
            2. wenn nicht, dann entferne aus X Elemente $a_1, ..., a_r$, die Linearkombinationen anderer Elemente aus X sind und beginne mit $\tilde{X}$ erneut
    - **gegeben**: linear unabhängige Teilmenge X eines Vektorraums V
        - prüfe, ob X ein Erzeugendensystem von V ist
            1. wenn ja, dann ist X eine Basis
            2. wenn nicht, dann wähle aus V Elemente $a_1, ..., a_r$, so dass $\tilde{X} = X \cup \{a_1, ..., a_r\}$ linear unabhängig ist und beginne mit $\tilde{X}$ erneut
    - **Durchführen bei Spaltenvektoren** $X = \{v_1, ..., v_s\}, v_i \in \mathbb{K}^n$: (*p. 153*)
        - schreibe Spalten v_i als Zeilen v_i^T und wende elementare Zeilenumformungen an
        - die Transponierten der ersten r Zeilen bilden eine **Basis** $B = \{b_1, ..., b_r\}$ von $\langle X \rangle$
        - ergänzt man die Matrix durch $n - r$ weitere Zeilen, die die Zeilenstufenform fortsetzen, verlängert man die linear unabhängige Menge zu einer **Basis**

Orthogonalität

Skalarprodukt

- eine Abbildung $s : (v, w) \to s(v, w)$ (***Skalarprodukt*** $(v, w) \to \langle v, w \rangle$) ist...
  - **bilinear**, wenn für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
    - $\langle \lambda v + v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ (*Linearität im I. Argument*)
    - $\langle v, \lambda w + w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ (*Linearität im II. Argument*)
  - **symmetrisch**, wenn: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
  - **positiv definit**, wenn $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$
- **Satz:** eine Abbildung ist ein Skalarprodukt, wenn **Linearität im I. Argument, Symmetrie und positive Definitheit** gelten
- **Standardskalarprodukt / kanonisches Skalarprodukt**:
  - $\langle v, w \rangle := v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
  - für $A \in R^{n \times n}$, $A = A^T$, A positiv definit (*quadratisch, symmetrisch, pos. def.*) gilt $\langle v, w \rangle_A := v^T A w$
- für alle $v, w \in V$ gilt $\langle 0, w \rangle = 0 = \langle v, 0 \rangle$

Länge, Abstand, Winkel, Orthogonalität

- **Länge / Norm eines Vektors**: $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
  - **euklidische Norm**: Norm mit *kanonischem Skalarprodukt*
  - z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to \text{mit SSP} = \sqrt{14}$
- **Abstand von zwei Vektoren v und w**: $d(v, w) = ||v - w|| = ||w - v||$
- **Winkel zwischen zwei nicht-nullen Vektoren v und w**: $\angle(v, w) = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{||v|| ||w||}\right)$
- v und w sind **senkrecht / orthogonal** ($v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$

Orthogonalsystem, -basis; Orthonormalsystem, -basis

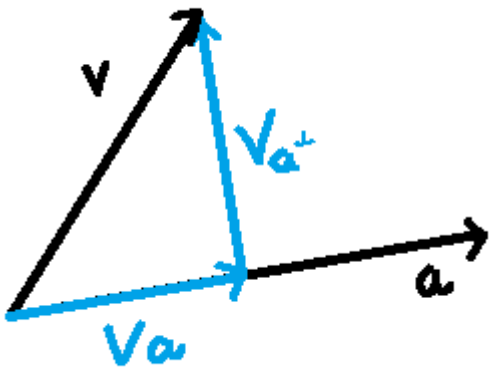
- **Orthogonalsystem (OGS)**: $B \subseteq V$, für alle $v, w \in B$ mit $v \neq w$ gilt $v \perp w$
- **Orthogonalbasis (OGB)**: $B \subseteq V$, B ist **Orthogonalsystem und Basis**
- **Orthonormalsystem (ONS)**: $B \subseteq V$, B ist **Orthogonalsystem** und $||v|| = 1$ für alle v (*normierte Vektoren*)
- **Orthonormalbasis (ONB)**: $B \subseteq V$, B ist **Orthonormalsystem und Basis**

Normieren eines Vektors

- ersetze jedes $v \neq 0$ durch $\hat{v} := \frac{1}{||v||} v$, um ein **Orthogonalsystem** in ein **Orthonormalsystem** umzuwandeln

- durch Normieren einer **Orthogonalbasis** B erhält man eine **Orthonormalbasis** $\tilde{B}$
- $E_n = \{e_1, ..., e_n\}$ ist eine **Orthonormalbasis** des $\mathbb{R}^n$
- mit dem **Kronecker-Delta**: B ist ONB $\iff \forall i, j : \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$

Orthogonale Zerlegung von v längs a (p. 167)



- $v = v_a + v_{a^\perp}$ mit $v_a = \lambda a$ und $v_{a^\perp} \perp a$
- **erhalte Zerlegung wie folgt**:
  1. $v_a = \frac{\langle v,a \rangle}{\langle a,a \rangle} a$
  2. $v_{a^\perp} = v - v_a$
- **REZEPT: Bestimmen der Linearkombination bezüglich einer ONB**:
  - sei $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ für jedes $v \in V$ bezüglich der ONB $B = \{b_1, ..., b_n\}$
  - dann findet man die **Linearkombination** für jedes v wie folgt: $\lambda_i = \langle v, b_i \rangle$
    - z.B. $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzgl. $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
    - $\lambda_1 = \langle (3,2)^T, b_1 \rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$
    - $\lambda_2 = \langle (3,2)^T, b_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$
    - *folgt*: $v = \frac{5}{\sqrt{2}} b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2$

Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahren

- **gegeben**: Basis $B = \{a_1, ..., a_n\}$
- **gesucht**: ONB
- **Verfahren**: bilde Vektoren $b_1, ..., b_n$ wie folgt:
  1. $b_1 = \frac{1}{||a_1||} a_1$
  2. $b_2 = \frac{1}{||c_2||} c_2$ mit $c_2 = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle b_1$
  3. $b_3 = \frac{1}{||c_3||} c_3$ mit $c_3 = a_3 - \langle a_3, b_1 \rangle b_1 - \langle a_3, b_2 \rangle b_2$

     ...
- **allgemein**: $b_n = \frac{1}{||c_n||} c_n$ mit $c_n = a_n - \langle a_n, b_1 \rangle b_1 - ... - \langle a_n, b_{n-1} \rangle b_{n-1}$

- **anders**: $b_{k+1} = \frac{1}{||c_{k+1}||} c_{k+1}$ mit $c_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle a_{k+1}, b_i \rangle b_i$

Die orthogonale Projektion

- **das orthogonale Komplement**: $U^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp u \; \forall u \in U\}$
  - $U^{\perp}$ ist Untervektorraum von V
  - $U^{\perp} \cap U = \{0\}$
  - jedes $v \in V$ hat genau eine Darstellung der Form $v = u + u^{\perp}$ mit $u \in U, u^{\perp} \in U^{\perp}$
  - wenn $\dim(V) = n$, dann $\dim(U^{\perp}) = n - \dim(U)$
- **REZEPT: Bestimmen des orthogonalen Komplements**:
  - bestimme eine Basis $\{b_1, ..., b_r\}$ von U mit $\dim(V) = n$ und $\dim(U) = r$
  - bestimme $n - r$ linear unabhängige Vektoren $a_1, ..., a_{n-r}$, die zu allen $b_1, ..., b_r$ orthogonal sind
  - $U^{\perp} = \langle a_1, ..., a_{n-r} \rangle$
- **die orthogonale Projektion**: $p_U : v = u + u^{\perp} \to u$
  - **der minimale Abstand von** v **zu** U: $||u^{\perp}|| = ||v - u||$
  - u als Lösung der **Minimierungsaufgabe**: $||v - u|| = \min$
- **REZEPT: die Minimierungsaufgabe**:
  - wähle Basis $\{b_1, ..., b_r\}$ von U
  - setze $u = Ax$ mit $A = (b_1, ...b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ für $x = (\lambda_1, ..., \lambda_r)^T \in R^r$
  - **bestimme** $x \in R^r$ **mit** $||v - Ax|| = \min$

Das lineare Ausgleichsproblem

- suche ein x, sodass zu einem **Vektor** v und einer **Matrix** A der Wert $||v - Ax||$ **minimal** wird
- **REZEPT:**: $x \in \mathbb{R}^r$ mit $A^T Ax = A^T v$
  - genau dann eindeutig lösbar, wenn $rg(A) = r$ (*Rang von* A *maximal*) ist
  - *Beispiel*:
    - $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
    - *dann* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
    - $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

    - $A^T v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
    - *LGS* $(A^T Ax \mid A^T v)$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$
    - *dann* $u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0b_1 + 2b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
    - *minimaler Abstand*: $u^\perp = (-1, 0, 1)^T \to ||u^\perp|| = \sqrt{2}$
- **Bemerkung**: wenn B eine ONB von U ist, gilt $x = A^T v$
- **REZEPT für überbestimmte LGS**: nutze $A^T Ax = A^T v$
- **REZEPT - die Methode der kleinsten Quadrate**:
    - **gegeben**: Stützstellen $(t_1, y_1), ..., (t_n, y_n)$
    - **gesucht**:
        - Ausgleichsgerade $f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$
            - d.h. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$
        - Ausgleichsparabel $g(x) = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2$
            - d.h. $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$
    - **Lösung**:
        - setze $v = (y_1, ..., y_n)^T$ und $A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & \dots & f_r(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(t_n) & \dots & f_r(t_n) \end{pmatrix}$
        - löse $A^T Ax = A^T v$ und erhalte $x = (\lambda_1, ..., \lambda_r)^T$
        - die Ausgleichsfunktion ist $f = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_r f_r$

Lineare Abbildungen

- eine Abbildung heißt **linear** oder **Homomorphismus**, falls $f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$
- **Eigenschaften**:
    - $f(0_V) = 0_W$
    - sind $f : V \to W$ und $g : W \to U$ linear, so ist auch $g \circ f : V \to U$ linear
    - ist $f : V \to W$ bijektiv und linear, so ist auch $f^{-1} : W \to V$ bijektiv und linear
- **REZEPT: Test, ob f linear ist oder nicht**:
    - gilt $f(0) = 0$?
        - wenn nicht, dann ist f nicht linear, sonst...
    - zeige, dass $f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$

        - *anders*: $f(v+w) = f(v) + f(w)$ und dann $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
    - andersrum, finde ein Gegenbeispiel

Bild, Kern, Dimensionsformel

- ist $f : V \to W$ linear, so sind $\ker$ und Bild Untervektorräume von V bzw. W:
    - $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$
    - $\text{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$
- **Defekt von** f: $\text{def}(f) = \dim(\ker(f))$
    - f ist genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$ bzw. $\text{def}(f) = 0$
- **Rang von** f: $\text{rg}(f) = \dim(\text{Bild}(f))$
- **Dimensionsformel**: $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$
    - wenn $\dim(V) = \dim(W)$, dann ist f bijektiv

Koordinatenvektoren

- **gegeben**: geordnete Basis $B = (b_1, ..., b_n)$
- so kann man jeden Vektor v eindeutig als Linearkombination bzgl. B darstellen
    - $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$
- **Koordinatenvektor von** v **bzgl.** B: ${}_B v = (\lambda_1, ..., \lambda_n)^T$
    - es gilt ${}_B(\lambda v + w) = \lambda {}_B v +_B w$, d.h. die **bijektive** Abbildung ${}_B : v \to {}_B\ v$ ist **linear**

Restklassen, Modulorechnen

- $a \mod n := r$ mit $r \in \{0, ..., n-1\}$ und $a = k \cdot n + r$
    - $a = 16, n = 7 \to 16 \mod 7 = 2$
    - $a = -16, n = 7 \to -16 \mod 7 = 5$ (alt. $-2 \to 7 - 2 \to 5$)
- **Rechenregeln**:
    - $(a + b) \mod n = ((a \mod n) + (b \mod n)) \mod n$
    - $(a \cdot b) \mod n = ((a \mod n) \cdot (b \mod n)) \mod n$
    - $(a \mod n) \mod n = a \mod n$
- **Kongruenz**:
    - $a \equiv_n b$: a und b haben bei Division durch n den **gleichen Rest**
    - **Satz**: $a \equiv_n b \iff n | (a - b)$
    - wenn $a \equiv_n b$ und $c \equiv_n d$, dann:
        - $a + c \equiv_n b + d$
        - $a \cdot c \equiv_n b \cdot d$

- **Restklassen**:
  - $n\mathbb{Z} = \{..., -2n, -n, 0, n, 2n, ...\} = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine **Untergruppe** von $(\mathbb{Z}, +)$
  - **Restklasse modulo** n: $\forall a \in \mathbb{Z} : \overline{a} := a + n\mathbb{Z}$
  - **Menge aller Restklassen**: $\mathbb{Z}_n := \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$
    - $\overline{a} +_n \overline{b} = \overline{a + b}$
    - $\overline{a} \cdot_n \overline{b} = \overline{a \cdot b}$
  - **kompletter Satz**: $a \equiv b \iff n|(a-b) \iff a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z} \iff \overline{a} = \overline{b}$
  - **Restklassengrupe modulo** n: $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ ist eine **kommutative Gruppe**
  - **Restklassenring modulo** n: $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist ein **kommutativer Ring mit 1**
  - **Einheitengruppe**: $\mathbb{Z}_n^* = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_n \mid ggT(a, n) = 1\}$
    - wenn n **prim**, dann $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$
    - $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist ein Körper **genau dann, wenn** n **prim ist**
- **Eulerische Phi-Funktion**:
  - $\varphi(n) = |\{a \in \{1, ..., n\} \mid ggT(a, n) = 1|$
    - $\varphi(p) = (p-1)$ für Primzahl p
    - $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ für Primzahlen p, q
- **der kleine Satz von Fermat**:
  - wenn p prim, dann...
    - $\forall a \in \mathbb{Z} \land ggT(a, p) = 1 : a^{p-1} \equiv_p 1$
    - $\forall a \in \mathbb{Z} : a^p \equiv_p a$
- **EEA (Erweiterter Euklidischer Algorithmus), schamlos von DS kopiert**:
  - **Verfahren**:
    - **von oben nach unten**: bestimme $\lfloor b/a \rfloor$, trage Wert von a in unteren Zeile für b und den Rest $b \mod a$ für a ein
      - wiederhole so lange, bis $b \mod a = 0$
    - **von unten nach oben**: setze $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, dann trage Wert von α_{alt} in der oberen Zeile für β und $\beta_{alt} - \lfloor b/a \rfloor_{current} \cdot \alpha_{alt}$ für α ein
      - wiederhole bis zur obersten Zeile
  - **multiplikatives Inverse** von a in $\langle Z_n^*, \cdot_n, 1 \rangle$ ist $\alpha \mod n$
  - **Test auf ggT**: $ggT(a, b) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta$

Lineare Codes

- **Informationswort**: $x \in K^k$ (oft $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$)

    - z.B. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^4$
- **Generatormatrix**: $G \in K^{n \times k}$
    - $G = \begin{pmatrix} E_k \\ A \end{pmatrix}$ (*Einheitsmatrix oben, "Zusatzinfos" unten*)
        - E_k **hat** k **Zeilen**
        - A **hat** $n - k$ **Zeilen**
        - **insgesamt** k **Spalten**
    - z.B. Parity-Check-Code Generatormatrix $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- **Codewort** (*Generatormatrix mult. mit Informationswort*): $c := Gx$
    - $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$
    - z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^5$
- **Linearer Code**: $C := \{G \cdot x \mid x \in K^k\} = \mathrm{Bild}(G) \leq K^n$ (*UVR*)
    - $\dim(C) = \mathrm{rg}(G) = k$ (d.h. **Spalten von** G **sind Basis von** C)
- (n, k)**-Code**:
    - $\dim(C) = \mathrm{rg}(G) = k$
    - **Informationsrate**: $\frac{k}{n}$
    - **Redundanz**: $n - k$
- **Kontrollmatrix**: $P = (-A \;\; E_{n-k})$
    - $\mathrm{rg}(P) = n - k$
    - **(!)** $P \cdot G = 0$
    - **(!)** $P \cdot v = 0 \iff v \in C$ (*bzw.* $C = \ker(P)$)
    - $-1 = 1$ in $\mathbb{F}_2$
- **REZEPT: Bestimmen eines empfangenen Informationswortes**
    - **gegeben**: Funktion

    - z.B. $(6,4)$-Code mit $(x_1,x_2,x_3,x_4) \to (x_1,x_2,x_3,x_4,x_1+x_2,x_3+x_4) \in \mathbb{F}_2^6$
  - bestimme **Generatormatrix**
    - z.B. $G = \begin{pmatrix} E_4 \\ A \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  - bestimme, ob $P \cdot c = 0$ (m.a.W. ob $c \in C$)
    - wenn nicht, dann müsste das Informationswort höchstwahrscheinlich noch einmal gesendet werden
  - löse LGS $G \cdot x = c$ und bestimme x
- **Dekodieren**:
  - **gesendet**: $c = (c_1, ..., c_n)$
  - **empfangen**: $c' = (c'_1, ..., c'_n)$
    - **Fall 1**: $c' \in C$
      - nehme an, dass das richtige Codewort empfangen wurde ($c' = c$)
      - löse $Gx = c'$
    - **Fall 2**: $c' \notin C$
      - suche $c'' \in C$ mit möglichst wenig Abweichung zu c'
        - **es gibt genau eins**: nehme an, dass $c'' = c$ (*fehlerkorrigierend*)
        - **es gibt mehrere**: Fehlermeldung (*fehlererkennend*)
- **Hamming-Abstand**:
  - für $v = (v_1, ..., v_n) \in K^n$ ist $w(v) = |\{i \in \{1, ..., n\} \mid v_i \neq 0\}|$ das **Hamming-Gewicht** von v (*Anzahl aller Einträge ungleich 0*)
    - z.B. $w\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$
  - für $v, v' \in K^n$ ist $d(v, v') := w(v - v') = |\{i \in \{1, ..., n\} \mid v_i \neq v'_i\}|$ der **Hamming-Abstand** von v und v' (*Anzahl aller Einträge, die in v und v' nicht übereinstimmen*)
    - z.B. $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3$
  - für eine Teilmenge $C \subseteq K^n$ ist $d(C) := \min\{d(c, c') \mid c, c' \in C \wedge c \neq c'\}$ der **Hamming-Abstand** von C (*c und c' unterscheiden sich an mindestens $d(C)$ Stellen*)
    - falls $|C| \leq 1$, setze $d(C) = n + 1$
    - für $C \leq K^n$ ist $d(C) = \min\{w(c) \mid c \in C \backslash \{0\}\}$

    - z.B. für $C = (8, 4)$-Wiederholungscode ist $w_{\min}(c) = 2$ für $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Eigenschaften**:
    - $d(c, c') = 0 \iff c = c'$
    - $d(c, c') = d(c', c)$
    - $d(c, c'') \leq d(c, c') + d(c', c'')$ (*Dreiecksungleichung*)
- **Satz**:
    - falls $d(C) = 2e + 1$ (ungerade), so ist C ein e-fehlerkorrigierender Code
    - falls $d(C) = 2e + 2$ (gerade), so ist C e-fehlerkorrigierend und $(e + 1)$-fehlererkennend