Mathespiele
Grundlagen

Finde ein Gegenbeispiel

Finde ein Gegenbeispiel

Inhalt: Algebraische Strukturen, Determinanten und Eigenwerte, Grenzwerte, Integration, normierte Räume, Skalarprodukte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Vektorräume und lineare Abbildungen.

Lernziel: Leichtsinnige Fehler bei richtig erscheinenden Aussagen zu vermeiden sowie die anschauliche Vorstellung zu verbessern.

Spielbeschreibung: Dieses Spiel kann mit beliebig vielen Spielern gespielt werden. Es wird versucht, zu einer gegebenen falschen Behauptung ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Der Spieler, der am schnellsten ein gültiges Gegenbeispiel findet, bekommt die Karte. Ziel ist es, die meisten Karten zu sammeln. Auf der Rückseite jeder Karte steht ein mögliches gültiges Gegenbeispiel.

Feedback, Korrekturen und Ideen bitte an
`philipp.wittmann@tum.de`
oder `maxim.baumgaertel@tum.de`

Behauptung

Einschränkungen von nicht injektiven Funktionen sind nicht injektiv

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ $\neg$injektiv aber $f|_{\mathbb{R}_{>0}}$ injektiv.

$$|f| \text{ stetig} \implies f \text{ stetig}$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Behauptung

Symmetrischen Matrizen sind positiv semidefinit.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$-I_n$ ist offensichtlich symmetrisch, aber

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}:$$

$$x^T(-I_n)x = -\sum_{k=0}^{n} x_k^2 < 0$$

$$\implies -I_n \text{ negativ definit}$$

$$f' \text{ beschränkt} \implies f \text{ beschränkt}$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$$
$$f'\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$$
$$\forall x \in (1,\infty)\colon |f'(x)| \leq 1$$

aber (mit $x := e^{C+1}$):

$$\forall C \in (0,\infty)\, \exists x \in (1,\infty)\colon |f(x)| > C$$

Behauptung

Jede auf einem beschränkten Intervall differenzierbare Funktion ist beschränkt.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

ist differenzierbar und unbeschränkt.

Behauptung

Die Ableitung einer beschränkten stetig differenzierbaren Funktion auf einem beschränkten Intervall ist beschränkt.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, t \mapsto 2\sqrt{t}$ ist beschränkt und
$f'\colon (0,1) \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ ist unbeschränkt.

(betrachte die Folge $\left(f'\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$)

Behauptung

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^2$. Seien A, B 2×2-Matrizen mit dem gleichen, einzigen Eigenpaar (λ, v). Dann gilt $A = B$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Seien A, B von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $m \neq 0$ und m verschieden für A und B. Es handelt sich dabei um unterschiedliche Scherungen, die als einzigen Eigenvektor $\binom{1}{0}$ zum Eigenwert 1 haben.

Behauptung

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend. Dann gibt es mindestens ein x_0, für das die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

nicht konvergiert.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Mit $f(x) = x$ ist jede Folge konstant.

Die Hessematrix H einer Funktion kann durch $u^T H v$ als Skalarprodukt fungieren.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x^2$ hat Hessematrix $H = (-2) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Wegen $1H1 = -2 \not> 0$ ist H nicht positiv definit und somit kein Skalarprodukt.

Mehrdimensionales Gegenbeispiel: Wähle $(x,y) \mapsto -x^2 - y^2$. Die Hessematrix ist dann $H = -I_2$. Durch $e_1^T H e_1 = -2 \not> 0$ folgt analog, dass H nicht als Skalarprodukt fungieren kann.

Behauptung

Die Menge der Einheitsvektoren

$$B := \{e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

bildet eine Basis des Vektorraums aller Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Gegenbeispiel

Notwendig um eine Basis zu sein muss jedes Element des Raums muss durch Linearkombination (endliche Summe!) aus Basisvektoren darstellbar sein. Die konstante 1-Folge ist das nicht.

Für alle nichtleeren Mengen $M \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\overline{M} = \overline{\operatorname{int} M}.$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Der Abschluss der Menge ist gleich}\\ \text{dem Abschluss des Inneren der Menge.}\end{array}\right)$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Das ist etwa für eine einpunktige Menge, z.B. $M = \{0\}$, nicht der Fall, denn es gilt $\overline{M} = M$, aber $\overline{\mathrm{int}\, M} = \emptyset$.

Behauptung

$\mathbb{Z}/(4)$ ist ein Körper.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Körper sind Nullteilerfrei, aber $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$.
Also ist $\mathbb{Z}/(4)$ kein Körper.

Behauptung

Jede injektive Funktion lässt sich injektiv fortsetzen.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Identität $\mathrm{id}\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ lässt sich nicht auf $\{1,2,3,4\}$ injektiv fortsetzen.

Grundsätzlich können bijektive Funktionen $f\colon A \to B$ nicht injektiv auf ein $A' \supsetneqq A$ fortgesetzt werden.

Auf einem beschränktem Intervall sind alle Lipschitzstetigen Funktionen differenzierbar.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, t \mapsto |t|$ ist Lipschitzstetig auf dem beschränkten Intervall $(-1,1)$, aber nicht differenzierbar in 0.

Behauptung

Jede konvergente Reihe konvergiert auch absolut.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die alternierende Harmonische Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, jedoch nicht absolut, denn die Harmonische Reihe divergiert.

Behauptung

Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Konvergiert $(|x_n|)_n$, so konvergiert auch $(x_n)_n$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Man kann etwa die Folge

$$x_n = (-1)^n$$

betrachten.

Jede quadratische Matrix über $\mathbb{R}$ hat reelle Eigenwerte.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Stellt man sich eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ vor, erkennt man, dass sie keinen Vektor auf ein Vielfaches abbildet. Tatsächlich hat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

keine reellen Eigenwerte, da $\chi_A(x) = x^2 + 1$ in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen hat.

Behauptung

$\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}$ bildet zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Halbgruppe.

(Eine Halbgruppe ist wie eine Gruppe, bei der nicht jedes Element ein Inverses haben muss)

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Das Produkt zweier Matrizen kann die Nullmatrix ergeben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$ nicht abgeschlossen.

Behauptung

Sei M eine überabzählbare kompakte Menge. Dann ist

$$\overline{M} = \overline{\mathrm{int}(M)}.$$

Gegenbeispiel

$$M := [0,1] \cup \{2\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt, nach Bolzano-Weierstraß also kompakt. $\mathrm{int}(M) = (0,1)$ und $\overline{\mathrm{int}(M)} = [0,1]$, aber $\overline{M} = M$.

Behauptung

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Falls

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe konvergent.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Für die divergente harmonische Reihe (mit $a_n = \frac{1}{n+1}$) gilt die Bedingung mit $n_0 = 0$.

Jeder Schnitt von offenen Mengen ist offen.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ sind alle offen.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$$

ist aber nicht offen.

Behauptung

Eine Matrix deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt ist diagonalisierbar.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Geometrische und algebraische Vielfachheiten müssen übereinstimmen. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist in Jordannormalform und nicht diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom zerfällt aber in Linearfaktoren: $\chi_A(x) = (x-1)^2$.

Für eine nilpotente Matrix N und eine Diagonalmatrix D gilt $ND = DN$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Seien

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = 0 \implies N \text{ ist nilpotent}$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = DN$$

Behauptung

Für jede Matrixnorm gilt

$$\|I\| = 1$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Aussage gilt für alle induzierte Normen. Für die Frobenius-Norm (nicht induziert) ist beispielsweise

$$\|I\|_F = \sqrt{n}.$$

Behauptung

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Mit $A := (0) \in \mathbb{F}_2^{1\times 1}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ die endliche Lösungsmenge $\{0, 1\}$.

Idee: Ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper besitzt nur endlich viele Vektoren. Somit ist jede Lösungsmenge eines lineares Gleichungssystems darüber offensichtlich endlich. Man muss zur Konstruktion nur beachten, dass die Lösungsmenge nicht leer und nicht $\{0\}$ ist.

Behauptung

Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit sind äquivalent.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f(x) = x^2$ ist stetig. Sei $\varepsilon = 1$. Für $\delta > 0$ gibt es $x, y \in \mathbb{R}$, nämlich $x = 1/\delta$ und $y = x + \delta/2$, mit $|x - y| = \delta/2 < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| = |2/\delta + \delta/2||-\delta/2| = 1 + \delta^2/4 \geq 1$. Also ist f nicht gleichmäßig stetig.

---

weiteres interessantes Gegenbeispiel:
$g\colon\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1, 1\},\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$

Behauptung

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist der Orbit

$$\Big(\underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{n}(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monotone Folge.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$ und $x = 0$. Dann alterniert die Folge zwischen 0 und 1.

Ist die Jacobimatrix eines Vektorfelds überall invertierbar, so ist die Funktion bijektiv.

Gegenbeispiel

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix}$$

besitzt die Jacobimatrix $\left(\begin{smallmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{smallmatrix}\right)$ die überall invertierbar ist. Die Funktion ist aber nicht injektiv, da z.B. $\binom{0}{0}$ nicht erreicht wird.

$x \mapsto e^x$ wäre ein eindimensionales Gegenbeispiel

Behauptung

Sei A eine reelle Matrix. Falls $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$, so ist $Ax = b$ für jedes b lösbar.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Aussage gilt nur für Abbildungen zwischen endlich- und gleichdimensionalen Räumen. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\text{Kern}(A) = \{0\}$ aber für $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ existiert keine Lösung.

Behauptung

Jede Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ hat eine
Jordan-Normalform über $\mathbb{R}$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Eine Jordannormalform von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert nur, wenn die Summe der algebraischen Vielfachheiten der rellen Eigenwerte gleich n ist. Das ist etwa für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht der Fall, denn A hat nur die Eigenwerte $\pm i$.

Im $\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: Geometrische und algebraische Vielfachheiten von Eigenwerten stimmen immer überein.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den einzigen Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2, denn $\det(A - xI) = (x-1)^2$, aber $\ker(A - I) = \langle e_1 \rangle$.

Eine Funktion f ist stetig in $x \in \mathbb{K}$ falls es eine konvergente Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{K}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ gibt mit $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

ist offensichtlich unstetig in 0.
Mit $x_n = \frac{1}{n}$ und $x = 0$ gilt die Bedingung jedoch.

Behauptung

Wenn der Gradient eines zweidimensionalen Skalarfelds an einem Punkt 0 ist und die Hessematrix an diesem Punkt positiv oder negativ semidefinit ist, dann liegt an dieser Stelle ein Minimum oder ein Maximum vor.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Betrachte $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 + y^3$. Der Gradient $\nabla f(x,y) = (3x^2\ \ 3y^2)^T$ ist im Nullpunkt 0 und die Hessematrix $\nabla^2 f(x,y) = \operatorname{diag}(6x, 6y)$ ist im Nullpunkt als Nullmatrix offensichtlich positiv semidefinit. An dieser Stelle liegt weder Minimum noch Maximum vor, denn

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ f(-\varepsilon, -\varepsilon) < f(0,0) < f(\varepsilon, \varepsilon).$$

Behauptung

Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge unendlich oft stetig differenzierbarer Funktionen ist stetig.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch:

$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \arctan(nx)$. Sie sind C^∞ und der punktweise Grenzwert

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \frac{\pi}{2} & t > 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig.

 Behauptung

Seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Es gilt $\det(M) = \det \begin{pmatrix} \det(A) & \det(B) \\ \det(C) & \det(D) \end{pmatrix}$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist Permutationsmatrix, damit invertierbar, also $\det(M) \neq 0$. Aber die einzelnen 2×2-Blöcke A, B, C, D haben die Determinante 0.

Behauptung

Die nilpotenten Matrizen bilden einen Vektorraum.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $N^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind nilpotent.

$$N + N^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_n.$$

$$\xRightarrow{\mathrm{GL}_n \text{ ist Gruppe}} \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \left(N + N^T\right)^n \in \mathrm{GL}_n$$

$$\xRightarrow{0 \notin \mathrm{GL}_n} \forall n \in \mathbb{N}\colon\ \left(N + N^T\right)^n \neq 0$$

$$\Longrightarrow N + N^T \text{ nicht nilpotent}$$

$\Longrightarrow$ nilpotente Matrizen unter Addition nicht abgeschlossen

Behauptung

Polynome haben höchstens endlich viele und Potenzreihen höchstens abzählbar unendlich viele Nullstellen.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Konstante 0 ist sowohl Polynom als auch Potenzreihe und besitzt über einem überabzählbaren Körper überabzählbar viele Nullstellen.

level 2 **Behauptung** 09/2022

Sei M eine Menge und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in M. Dann ist der Grenzwert dieser Folge eindeutig.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Der Begriff *Konvergenz* ergibt auf einer allgemeinen Menge M keinen Sinn; man braucht dafür mindestens eine Topologie $\mathscr{T}$. Es gibt topologische Räume $(M, \mathscr{T})$, in denen Grenzwerte nicht eindeutig sind: Wähle zum Beispiel $\mathscr{T} = \{\emptyset, M\}$.

Im Fall von metrischen Räumen sind Grenzwerte eindeutig (Hausdorffsche Trennungseigenschaft).

Behauptung

Auf den Raum der Riemann-Integrierbaren Funktionen $R[a,b]$ wird durch

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)dt$$

ein Skalarprodukt definiert.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Unter der Annahme dass $\mathbb{1}_{\{0\}}$ eine Riemann-Integrierbaren Funktion ist, ist $\langle \mathbb{1}_{\{0\}}, \mathbb{1}_{\{0\}} \rangle = 0$ obwohl $\mathbb{1}_{\{0\}} \neq 0$. Widerspruch zur positiven Definitheit.

Zur Notation: $\mathbb{1}$ ist die Indikatorfunktion, die für eine Menge A definiert ist als

$$\mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Behauptung

Ist die induzierte Norm einer quadratischen Matrix nicht 0, so ist sie invertierbar.

$$\left(\text{induzierte Norm: } \|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Für $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist
$\|A\| \geq \frac{\|Ae_1\|}{\|e_1\|} = \frac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = 1 \neq 0$ und
$\det(A) = 0$, also nicht invertierbar.

Alle Matrizen ungleich der Nullmatrix haben aufgrund der positiven Definitheit von Normen eine Norm > 0.

Behauptung

$\mathbb{R}$ ist mit $\leq$ wohlgeordnet.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Menge

$$\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

enthält kein kleinstes Element.

Behauptung

Jedes maximale Element ist auch das größte.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Über $\{0,1\}$ mit Ordnungsrelation $\{(0,0),(1,1)\}$ sind die beiden Elemente nicht vergleichbar. Also ist jedes Element maximal, aber keines größtes.

Maximales Element: Es gibt kein größeres.
Größtes Element: Größer als jedes andere.

Behauptung

Für alle skalaren Felder f gilt: Bei einem strikten lokalen Minimum x ist $\nabla f(x) = 0$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Betonung liegt auf ALLE. Es gibt Skalarfelder, an deren Minimum das Skalarfeld nicht partiell differenzierbar ist. Damit ist $x \mapsto \|x\|$ ein Gegenbeispiel mit striktem globalem Minimum 0 und undefiniertem Gradienten.

Behauptung

Jede Folge in einem abgeschlossenen Intervall besitzt eine konvergente Teilfolge.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Folge der Natürlichen Zahlen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ im abgeschlossenen Intervall $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

Die Eigenräume einer Matrix stehen immer orthogonal aufeinander.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Betrachte $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zum Eigenwert 1 ist der Eigenraum $\langle e_1 - 2e_2, e_3 \rangle$ und zum Eigenwert 2 ist der Eigenraum $\langle e_1 \rangle$. Die Eigenräume sind aber nicht orthogonal zueinander:

$$\langle e_1 - 2e_2, e_1 \rangle = 1 \neq 0$$

Behauptung

Wenn die Hessematrix überall positiv definit ist, existiert ein Minimum.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto e^x + e^y$ ist $\nabla^2 f(x,y) = \mathrm{diag}(e^x, e^y)$ positiv definit, wie man an den Eigenwerten e^x und e^y erkennen kann, für alle $(x\,y)^T \in \mathbb{R}^2$. Aber $\nabla f(x,y) = (e^x\ e^y)^T \neq 0$, also gibt es keine Minima.

Behauptung

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $\sup_{x \in K} |f'(x)| < \infty$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Betrachte $K = [0,1]$ und die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x^2 \sin(x^{-3}) & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Behauptung

Jeder Vektorraum ist vollständig.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Der Vektorraum $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig wegen des verletzten Vollständigkeitsaxiom.

Wähle eine Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen eine irrationale Zahl (z.B. $\sqrt{2}$) konvergiert. Dann ist diese Folge als konvergente Folge in $\mathbb{R}$ gleichzeitig Cauchyfolge, doch nicht konvergent im Raum $\mathbb{Q}$.

Behauptung

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dann gilt $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Für $x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

aber die Ableitungen divergieren.

Behauptung

Für jede unendlich oft differenzierbare Funktion konvergiert deren Taylorreihe gegen die Funktion selbst.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Taylorreihe von

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

entwickelt im Nullpunkt ist gleich 0. Das bedeutet die Taylorreihe konvergiert gegen die Nullfunktion bezüglich jeder Norm von $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Für eine unitäre Matrix U und beliebige Norm gilt $\|U\| \geq 1$.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist unitär}$$

aber mit der Maximumsnorm

$$\|A\|_{\max} := \max_{i,j \in [n]} |a_{i,j}|$$

gilt $\|U\|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

Behauptung

Konvergiert eine Folge bezüglich einer Norm, so ist sie bezüglich jeder anderen Norm beschränkt.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Funktionenfolge $f_n := \frac{1}{n}\,\mathbb{1}_{(0,n^2]}$ konvergiert bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm gegen die Nullfunktion, divergiert jedoch bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.

Zur Konstruktion: Da im endlichdimensionalen alle Normen äquivalent sind, müssen wir einen ∞-dimensionalen Raum betrachten.

Zur Notation: Mit $\mathbf{1}_A$ bezeichnen wir die Indikatorfunktion: $\mathbf{1}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und 0 sonst.

Jede reellwertige, stetige, differenzierbare, beschränkte und auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion ist gleichmäßig stetig.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f(x) = \cos(e^x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und beschränkt. Aber: Sei $\varepsilon = 1$. Für $\delta > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sodass für $x = \ln(2\pi k)$ und $y = \ln(2\pi k + \pi)$ gilt: $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| = |1 - (-1)| = 2 \geq \varepsilon$. Also f nicht gleichmäßig stetig.

(Bemerkung: Es ist $\ln(x) - \ln(x + c) \xrightarrow{x\to\infty} 0$.)

Behauptung

Jede reellwertige differenzierbare Funktion ist auch stetig differenzierbar.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Die Funktion $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ kann mittels $f(0) := 0$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar fortgesetzt werden.

Behauptung

Ein Polynom $\neq 0$ besitzt höchstens soviele Nullstellen wie sein Grad.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$f = x^2 + x$ hat über $\mathbb{Z}/(6)$ die Nullstellen $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}\}$. $|N| = 4 > 2 = \deg(f)$.

Zur Konstruktion: Die Behauptung gilt für alle Körper. Beim Versuch mit $\mathbb{Z}/(n)$ darf also n keine Primzahl sein. Wähle Polynom mit uneindeutiger Linearfaktorzerlegung; z.B. $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) = (x-c)(x-d) = x^2 - (c+d)x + cd$ und suche a, b, c, d entsprechend.

Jede Folge in einer abgeschlossenen und beschränkten Menge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Betrachte die Funktionenfolge $(\mathbb{1}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{1}_n(\mathbb{R}\setminus\{n\}) = \{0\} \wedge \mathbb{1}_n(n) = 1$, im Raum der beschränkten Funktionen. Sie hat offensichtlich keine konvergente Teilfolge. $(\mathbb{1}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch eine Folge in der abgeschlossenen (und beschränkten) Einheitskugel

$$K = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Behauptung

Jede partiell differenzierbare Funktion ist stetig.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist überall partiell differenzierbar, aber im Nullpunkt nicht stetig fortsetzbar:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{t\to 0} f(-t,t)$$

$$\forall (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } C^\infty,\ f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \in C^\infty :$$
$$f_n' \xrightarrow{n\to\infty} f'$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$$

$$f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n\to\infty} 0 =: f \text{ und } f' \equiv 0, \text{ aber}$$

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung

$$f \text{ stetig in } a \\ \Longrightarrow \\ \exists b \neq a : f \text{ stetig in } b.$$

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nur in 0 stetig.

level 4 **Behauptung** 09/2022

Für $p > 0$ ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p},$$

ein normierter Raum.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Für $p < 1$ ist die Einheitskugel nicht mehr konvex, womit die Dreiecksungleichung nicht mehr erfüllt ist: Es gilt $\|0.5e_1 + 0.5e_2\|_p = (2^{-p} + 2^{-p})^{1/p} = 2^{\frac{1-p}{p}} > 1$, da der Exponent für $p \in (0,1)$ positiv ist, aber andererseits ist $\|0.5e_1\|_p + \|0.5e_2\|_p = 0.5 + 0.5 = 1.$

Lineare Abbildungen sind stetig.

Finde ein Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Sei P der Raum aller Polynome $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Die lineare Abbildung $\varphi\colon P \to P,\ f \mapsto f'$ ist unstetig in 0: Für die Folge $(p_n : x \mapsto x^n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\|p_n - 0\|_\infty = {}^1\!/\!_n \to 0$, aber $\varphi(p_n) \to 0$ gilt nicht einmal punktweise.