

# Klassische Kenntnisse

Kann ich alles? Hier findest du Listen von klassischen Definitionen, Vorgehensweisen und Sätzen, die so oder ähnlich von den meisten Prüfern erwartet werden. Alles was du hier findest solltest du ohne nachzudenken erklären können. Einiges kann trivial erscheinen, aber versuch doch mal es dir selbst zu erklären.

Diese Liste stellt keinen Anspruch auf Vollständigkeit!

## 1 Definitionen, die man einfach draufhaben sollte

### Analysis

- Was ist eine Folge? Wie ist Beschränktheit/Monotonie definiert?
- Wie ist die Konvergenz einer Folge definiert?

- 
- Was ist eine Reihe?
  - Wie ist die (absolute) Konvergenz einer Reihe definiert?
  - Was ist die geometrische Reihe?
  - Was ist die harmonische Reihe?
  - Wie ist das Cauchy-Produkt definiert?

- 
- Wie ist Stetigkeit definiert? Wie sind gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit definiert? Was folgt woraus?

- 
- Wie ist die Ableitung einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x \in \text{int } D$  definiert? Wieso muss hierfür  $x$  im Inneren von  $D$  liegen?

- 
- Was ist eine Treppenfunktion?
  - Wie wird das Integral einer Treppenfunktion definiert? Worauf muss man dabei achten?
  - Was ist eine Regelfunktion?
  - Wie wird das Integral einer Regelfunktion definiert? Worauf muss man dabei achten?
  - Was ist eine Stammfunktion?

- 
- Was ist eine Potenzreihe?
  - Wie ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe definiert?
  - Wie ist das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f \in C^n(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall, definiert?

- 
- Was ist eine offene Menge in einem normierten Raum  $(X, \|\cdot\|)$ ?
  - Wie sind Rand, Inneres und Abschluss einer Menge  $M \subset X$  definiert?
-

- Wie ist die Ableitung einer Kurve definiert?
- Wie ist die Richtungsableitung eines Skalarfeldes definiert? Was ist der Gradient?
- Wie sind Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes definiert?
- Wie ist ganz allgemein Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen definiert?
- Was ist die Hesse-Matrix?

- 
- Was ist eine induzierte Matrixnorm oder auch Operatornorm?
  - Wie ist das Matrixexponential definiert?

### Lineare Algebra

- Was ist eine Gruppe? Wann heißt sie abelsch?
- Was ist die symmetrische Gruppe auf  $\{1, \dots, n\}$ ?
- Was ist eine (erzeugte) Untergruppe?
- Was ist ein Ring?
- Was ist ein Körper? Wann ist er algebraisch abgeschlossen?

- 
- Was ist ein Vektorraum?
  - Was ist ein (erzeugter) Unterraum?
  - Was ist eine Basis?

- Was ist die Dimension eines Vektorraums, und welche Schwierigkeiten treten bei der Definition auf?

- 
- Was ist eine lineare Abbildung?
  - Wie ist die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung definiert?
  - Wann sind zwei Matrizen äquivalent/ ähnlich?

- 
- Wie ist die Determinante definiert?
  - Was ist die Adjunkte einer Matrix?

- 
- Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren?
  - Was ist die charakteristische Matrix und das charakteristische Polynom?
  - Wie sind algebraische und geometrische Vielfachheit definiert?
  - Wie ist die Jordansche Normalform definiert?

- 
- Wie ist ein (komplexes) Skalarprodukt definiert?
  - Wie ist die durch das Skalarprodukt induzierte Norm definiert?
  - Was ist eine Orthonormalbasis?
  - Was ist das orthogonale Komplement eines Unterraums?
  - Was ist eine orthogonale Abbildung?

## 2 Sätze und Lemmata, die man einfach draufhaben sollte

Diese Sätze solltest Du mit allen Voraussetzungen parat haben. Warum funktionieren die Sätze denn nicht mehr, wenn man an den Voraussetzungen etwas ändert?

### Analysis

- Welche notwendigen und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer Folge gibt es?
- Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß?
- In jedem normierten Raum ist jede Cauchy-Folge —?—, aber nur, wenn der Raum —?— ist, ist jede Cauchy-Folge —?—.

- 
- Ist eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  genau dann konvergent, wenn  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  mit  $m \geq 1$  konvergent ist? Wie unterscheiden sich die Grenzwerte?
  - Wann konvergiert die geometrische Reihe?
  - Was besagt das Cauchy-Kriterium? Was besagt das Leibniz-Kriterium?
  - Was ist eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Reihe konvergiert?
  - Konvergiert die harmonische Reihe? (Bonusfrage: Warum?)
  - Konvergiert die alternierende harmonische Reihe? (Bonusfrage: Worum?)

- Was besagt das Majorantenkriterium/ Quotientenkriterium/ Wurzelkriterium?

- Warum konvergiert die Exponentialreihe überall absolut?

- 
- Was besagt der Zwischenwertsatz?

- Inwiefern “erhalten stetige Funktionen strikte Ungleichungen”?

- Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend/fallend. Dann ist  $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$  —?— und  $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$  ist —?— und —?—.

- Was besagt der Satz über Maxima und Minima von stetigen Funktionen?

- 
- Wie lauten Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel für die Ableitung?

- Die Ableitung als lineare Approximation: Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{int } D$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann differenzierbar in  $a$  mit  $f'(a) = c$ , falls  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$  mit  $r(h) = \text{—?—}$ .

- Gib eine notwendige Bedingung dafür, dass  $x$  ein lokales Extremum einer differenzierbaren Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ist, an.

- Was besagt der Satz von Rolle?

- Was besagt der (verallgemeinerte) Mittelwertsatz?

- Gib eine hinreichende Bedingung dafür, dass  $x$  ein lokales Minimum/ Maximum einer Funktion  $f \in C^2((a, b), \mathbb{R})$  ist, an.

- Was besagt der Satz von de l'Hospital?

- 
- Welche Eigenschaften hat die Funktion  $I: \mathbb{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ ? (Oder anders formuliert: Welche Rechenregeln gelten für Integrale?)
  - Was besagt der Mittelwertsatz der Integralrechnung?
  - Was besagt der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung?
  - Wie lautet die Substitutionsregel?
  - Was ist partielle Integration?

- 
- Sei  $f: (a - r, a + r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$ . Wie kann man die  $c_k$  mithilfe der Ableitungen  $f^{(k)}(a)$  ausdrücken?
  - Der Fehler  $r(h) = f(a + h) - T_n(a + h)$  liegt in  $o(-? -)$ .

- 
- Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß im Mehrdimensionalen?
  - Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|)$  normierte Räume,  $D \subset X$ . Eine Funktion  $f: D \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn...
  - Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $\emptyset \neq D \subset X$  —?— und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  —?—. Dann nimmt  $f$  auf  $D$  Maximum und Minimum an.

- 
- “partiell differenzierbar”, “differenzierbar”, “stetig”, “stetig differenzierbar”, “punktweise stetig”, “gleichmäßig stetig”, “Lipschitzstetig”: Was folgt woraus?
  - Wie lautet die Kettenregel im Mehrdimensionalen? Wie lautet Sie im Spezialfall “Skalarfeld  $\circ$  Kurve”?
  - Was besagt der Mittelwertsatz für skalare Felder?
  - Was besagt der Satz von Schwarz?
  - Was sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass  $x$  ein lokales Minimum einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist?

- 
- Wie lautet der Satz über inverse Funktionen?
  - Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?
  - Minimierung unter einer Nebenbedingung: Was sagt die Existenz eines Lagrange-Multiplikators aus?

### Lineare Algebra

- Wie viele Elemente hat die symmetrische Gruppe?
- Von welchen Elementen wird die symmetrische Gruppe erzeugt?
- Ist  $K$  ein Körper, so ist  $\text{char}(K) \in$  —?—. (Charakteristik)
- Ein Polynom  $f \neq 0$  über einem Körper  $K$  hat höchstens —?— Nullstellen. Das geht aus der —?— hervor, die etwa auch in  $\mathbb{Z}$  möglich ist.

- Was besagt der Fundamentalsatz der Algebra?
- 

- Sind  $U_1, U_2 \subset V$  zwei Unterräume, so gilt  $\langle U_1 \cup U_2 \rangle = \text{---?---}$ .
  - Wie kann man den erzeugten Unterraum  $\langle S \rangle$ ,  $S \subset V$ , mithilfe von Linearkombinationen beschreiben?
  - Eine Menge  $B$  ist genau dann eine Basis von  $V$ , wenn  $B$  eine maximal  $\text{---?---}$  Teilmenge von  $V$  ist oder wenn  $B$  ein minimales  $\text{---?---}$  ist.
  - Was besagt der Basisergänzungssatz?
- 

- Welche Dimension haben Kern und Bild einer linearen Abbildung  $K^n \rightarrow K^m$  mit Darstellungsmatrix  $A$ ? Welche Dimension hat der von den Zeilen von  $A$  aufgespannte Unterraum?
- Was besagt der Dimensionssatz für lineare Abbildungen?
- Was bedeutet “lineare Fortsetzung” (in Bezug auf lineare Abbildungen)?
- Ist  $\varphi: V \rightarrow W$  linear mit  $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ , so sind äquivalent: (a)  $\varphi$  ist ein Isomorphismus. (b)  $\varphi$  ist  $\text{---?---}$ . (c)  $\varphi$  ist  $\text{---?---}$ .
- Wann ist eine Matrix invertierbar? Gebe so viele äquivalente Bedingungen wie möglich an.
- Wie funktioniert Basiswechsel?
- Was ist eine (notwendige und hinreichende) Bedingung dafür, dass zwei Matrizen äquivalent sind?

- 
- Welche Eigenschaften hat die Determinante?
  - Was besagt der Determinantenmultiplikationssatz?
  - Was passiert bei der “Entwicklung nach einer Zeile/Spalte”, wenn man eine Determinante berechnen will?
  - Welche geometrische Interpretation hat die Determinante?
- 

- Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?
  - Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?
  - Wann hat eine Matrix eine Jordansche Normalform?
- 

- Was besagt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung?
- Gibt es immer eine orthonormale Basis?
- Von welchen Elementen wird die Gruppe der orthogonalen Matrizen erzeugt?

### 3 Handfertigkeiten, die man einfach draufhaben sollte

- Ableitung und Integral einer Funktion berechnen (Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel, Substitutionsregel, partielle Integration).
- Maxima und Minima bestimmen.
- Taylorpolynome einer gegebenen Funktion bestimmen.
- Division mit Rest und Linearfaktorzerlegung von Polynomen
- Lösungen von linearen Gleichungssystemen berechnen, Gaußalgorithmus, Cramersche Regel.
- Gegebene Vektoren auf lineare Unabhängigkeit prüfen bzw. eine Basis aus einem gegebenen Erzeugendensystem berechnen.
- Determinanten und Inverse von Matrizen bestimmen.
- Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen.
- Matrizen Diagonalisieren
- Die Jordansche Normalform (mit Basiswechsellmatrix) berechnen.
- Gegebene Vektoren orthogonalisieren (Schmidt'sches Verfahren).