Mathespiele

Grundlagen

Quiz

Quiz

Inhalt: Algebraische Strukturen, Determinanten und Eigenwerte, Grenzwerte, Integration, normierte Räume, Skalarprodukte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Vektorräume und lineare Abbildungen.

Lernziel: Auf konkrete Fragen präzise und mit geeignetem Fachvokabular zu antworten sowie Gedanken strukturiert wiederzugeben.

Spielbeschreibung: Es gibt zwei Spieler. Einer stellt eine Frage, die sich auf der Vorderseite eines Kärtchens befindet. Der andere versucht, darauf wie in einer mündlichen Prüfungssituation zu reagieren. Ziel des Spiels ist es, alle Fragen richtig zu beantworten. Die meist eindeutigen Lösungen stehen auf der Rückseite der Karte. Zu Bonusfragen gibt es keine Lösungen auf den Karten.

Feedback, Korrekturen und Ideen bitte an
`philipp.wittmann@tum.de`
oder `maxim.baumgaertel@tum.de`

Frage

Was sind Eigenwerte einer reellen $n \times n$-Matrix? Wie bestimmt man diese?

Antwort

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix. Eigenwerte sind die $\lambda \in \mathbb{R}$, für die es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt sodass $Ax = \lambda x$. Man kann diese bestimmen indem man das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda I)$ bildet und davon die Nullstellen bestimmt

Frage

Sei λ ein Eigenwert einer reellen quadratischen Matrix A. Können Sie zeigen, dass auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert ist? Was wäre der Eigenvektor zu $\overline{\lambda}$?

Antwort

Für ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ gilt dass $f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$. Da das charakteristische Polynom χ einer reellen Matrix reell ist, gilt: $\chi(\lambda) = 0 = \overline{0} = \overline{\chi(\lambda)} = \chi(\overline{\lambda})$
Sei x der Eigenvektor zu λ. Da die Matrix reell ist, ist $\overline{A} = A$ und mit $\overline{\lambda}\overline{x} = \overline{\lambda x} = \overline{Ax} = A\overline{x}$ ist $\overline{x}$ der Eigenvektor zu $\overline{\lambda}$.

Sind die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix reell?

Antwort

Ja. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix und λ ein Eigenwert zum Eigenvektor x.

$$\overline{\lambda} x^T \overline{x} = x^T \overline{\lambda x} = x^T \overline{Ax} = x^T A \overline{x} =$$
$$x^T A^T \overline{x} = (Ax)^T \overline{x} = (\lambda x)^T \overline{x} = \lambda x^T \overline{x}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Frage

Maximiere $x \mapsto x^T Ax$ (A symmetrisch) unter der Nebenbedingung, dass $x^T x = 1$.

Antwort

Kandidaten für die Lösung erhält man mittels Lagrange-Multiplikator

$$Ax = \nabla(x^T Ax) = \lambda \nabla(x^T x - 1) = \lambda x.$$

Der Eigenvektor zum größten Eigenwert mit $x^T x = 1$ ist dann das tatsächliche Maximum.

Frage

Hat jeder Vektorraum eine Basis?

Antwort

Ja, das garantiert der Basisergänzungssatz. Zum Beweis benötigt man das Zornsche Lemma.

Frage

Wie sieht die Linearfaktorzerlegung von $z^4 + 81$ aus?

Antwort

Mit $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ und $x^2 + y^2 = (x-yi)(x+yi)$ findet man $z^4 + 81 = (z^2)^2 + 9^2 = (z^2 - 9i)(z^2 + 9i) = (z^2 - 3^2 i)(z^2 + 3^2 i) = (z-3i)(z+3i)(z - 3i^2)(z+3i^2) = (z-3i)(z+3i)(z+3)(z-3)$

Frage

Kann man jeden Ring zu einem Körper erweitern?

Antwort

Betrachte einen beliebigen Ring mit Nullteilern. Da die Gesetze für einen Nullteiler bei der Erweiterung des Rings erhalten bleiben kann die Erweiterung nie ein Körper sein, denn Körper sind Nullteilerfrei.

Frage

Sei die $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt definiert: $f_n\colon [0,1] \to [0,1], t \mapsto t^n$. Besitzt diese Folge einen Grenzwert? Wenn ja, welchen?

Antwort

Die Folge konvergiert punktweise gegen

$$f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,1) \\ 1 & t = 1 \end{cases}$$

aber nicht gleichmäßig, denn alle f_n sind stetige Funktionen und damit müsste die Grenzfunktion f auch stetig sein.

Frage

Welche Bedingungen müssen Sie an eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stellen, damit diese diagonalisierbar ist?

Antwort

Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{e_i} \text{ mit } e_i = m_a(\lambda_i)$$

UND Für jeden Eigenwert λ_i gilt

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$$

(algebraische gleich geometrische Vielfachheit)

Frage

Geben Sie die Gleichung $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$ in der Form $x^T Ax + b^T x + c = 0$ an. Welche Gestalt hat die Lösungsmenge?

Antwort

Dies funktioniert mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = -1.$$

Das ist eine Ellipse. A streckt und staucht den zugrundeliegenden Kreis $x^T x - 1 = 0$ gemäß seiner Eigenwerte in Richtung der Eigenvektoren.

Frage

Wir haben in den Vorlesungen gehört, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie das.

Antwort

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind genau dann ähnlich, falls es S invertierbar mit $A = S^{-1}BS$ gibt. Die Reflexivität folgt mit $S = \mathrm{Id}$, die Symmetrie durch Umstellen der Gleichug und die Transitivität folgt aus $\forall S, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : ST \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \wedge T^{-1}S^{-1} = (ST)^{-1}$

Frage

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit einer nicht symmetrischen Jacobi-Matrix. Zeigen Sie, dass es kein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla f = F$.

Antwort

Kontraposition. Gibt es ein solches f, so ist dieses zweimal stetig differenzierbar. Der Satz von Schwarz liefert $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, das sind aber genau die Einträge von $H_f(x) = J_F(x)$. Also ist die Jacobi-Matrix von F symmetrisch.

Frage

In welchem Zusammenhang steht der Dimensionssatz über lineare Abbildung zur eindeutigen Lösbarkeit eines lineares Gleichungssystems $Ax = 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$?

Antwort

Der Dimensionssatz besagt, dass $\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{img}(A)) = n$. Soll das LGS eindeutig lösbar sein, muss A surjektiv, also $\dim(\mathrm{img}(A)) = m$ und damit $\dim(\ker(A)) = m - n$, und injektiv, also $\ker(A) = \{0\}$, sein. Beides zusammen ergibt $m = n$.

Frage

Erklären Sie zwei äquivalente Bedingungen dafür, dass eine reelle quadratische Matrix positiv definit ist.

Antwort

Das **Minorantenkriterium** besagt, dass eine Matrix genau dann positiv definit ist, falls alle Hauptminoren positiv sind. Desweiteren ist eine reelle quadratische Matrix genau dann positiv definit, falls all ihre **Eigenwerte positiv** sind.

Frage

Zeigen Sie, dass für eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt, dass deren Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist.

Antwort

Es gibt S invertierbar mit $D = S^{-1}AS$, D die Diagonalmatrix aus den Eigenwerten. Die Aussage folgt aus

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(SDS^{-1}) = \\ &= \det(S)\det(D)\det(S^{-1}) = \\ &= \det(S)\det(S)^{-1}\det(D) = \det(D).\end{aligned}$$

Frage

Zeigen Sie, dass ähnlich Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ dieselben charakteristischen Polynome besitzen.

Antwort

$$\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \colon A = S^{-1}BS.$$

$$\chi_A(x) =$$

$$= \det(xI_n - S^{-1}BS) =$$

$$= \det(S^{-1}(xI_n - B)S) =$$

$$= \chi_B(x)$$

Nenne eine notwendige und eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Antwort

Notwendige Bedingung: Beschränkt
Äquivalente Bedingungen: Cauchyfolge ($\mathbb{R}$ ist Banachraum) ODER "Jede Teilfolge konvergiert gegen den selben Grenzwert."
Hinreichende Bedingung: Monotoniekriterium (beschränkt und monton)

Frage

Zeigen Sie, dass das Monotoniekriterium (beschränkt und monoton) eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass eine reelle Folge konvergiert.

Antwort

Nur Fall “monoton steigend”: Sei $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es (Supremumseigenschaft) $N \in \mathbb{N}$ mit $s - \varepsilon < a_N \leq s$ und Monotonie ergibt $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$ für alle $n \geq N$. Das ist gerade die Definition von $a_n \to s$.

Wie bestimmt man Minima und Maxima eines zweimal stetig differenzierbaren Skalarfelds?

Antwort

Man löst $\nabla f(x) = 0$. Das sind die möglichen Kandidaten. Dann betrachtet man $\nabla^2 f(x)$ für eben diese Kandidaten: Ist $\nabla^2 f(x)$ weder pos. noch neg. semidefinit, so ist x kein Extremum. Ist $\nabla^2 f(x)$ pos./neg. definit, so ist x ein striktes lokales Min/Max. Andernfalls nachprüfen.

Frage

Zeigen Sie: Ist f partiell differenzierbar und ist x ein lokales Extremum von f, so gilt $\nabla f(x) = 0$.

Antwort

Wir zeigen $\partial_i f(x) = 0$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$: Definiere $g(t) := f(x + te_i)$. Dann hat g ein lokales Extremum in 0 und es gilt $\partial_i f(x) = g'(0) = 0$. (Der Mehrdimensionale Fall wurde auf den Eindimensionalen zurückgeführt).

Frage

Warum ist die Menge aller konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$ ein Vektorraum? Zeigen Sie, dass das Verschieben von Folgenindizes eine lineare Abbildung ist.

Antwort

Wenn man Folgen gliederweise addiert oder mit Skalaren multipliziert, erhält man wieder eine konvergente Folge. Es ist gleichgültig, ob man zuerst den Index der Folgen verschiebt und sie dann addiert/mit Skalaren multipliziert oder andersherum, deshalb ist die Indexverschiebung linear.

Frage

Was ist der Unterschied zwischen der Geometrischen und der Neumannschen Reihe? Was sind die Definitionsgebiete?

Antwort

Die Geometrische Reihe ist $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Sie ist definiert für reelle bzw. komplexe x, die $|x| < 1$ erfüllen. Die Neumannsche Reihe ist von der selben Gestalt, wobei x in diesem Fall Matrizen sind, deren induzierte Matrixnorm kleiner 1 ist.

Frage

Zeigen Sie, dass die Menge aller beschränkten Funktionen einen Vektorraum bilden.

Antwort

Sind f, g beschränkt mit Schranken $M, N > 0$, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $|f(x) + \lambda g(x)| \leq M + |\lambda| N =: L$ für alle x, also ist auch $f + \lambda g$ beschränkt mit Schranke L. Damit ist die Menge aller beschränkten Funktionen ein Unterraum der Menge aller Funktionen.

Frage

Wie kann man $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$ konstruieren?

Antwort

Man fügt ein neues Element i hinzu, das die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ löst (oder mit anderen Worten: $i^2 = -1$ erfüllt).

Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wie sehen die Lösungen von $z^n = 1$ aus?

Antwort

Wir können $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z| \in \mathbb{R}_{>0}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten schreiben. $r^n = |z|^n = |z^n| = |1| = 1 \implies r = 1$. Wir schreiben auch $1 = 1e^{2\pi ki}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also

$$e^{n\varphi i} = z^n = 1 = e^{2\pi ki}$$

$$\implies n\varphi = 2\pi k \implies \varphi = {}^{2\pi ki}/_{n}$$

$$\implies z = \exp({}^{2\pi ki}/_{n}).$$

Frage

Wie ist die Exponentialfunktion definiert und inwiefern kann man sie auch auf Matrizen anwenden?

Antwort

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Summen und Potenzen sind auch für quadratische Matrizen definiert. Führt man Matrixnormen ein, kann man auch von Konvergenz sprechen. In diesem Sinne konvergiert $\exp(A)$ für jede Matrix A.

Frage

Wann ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar?

Antwort

Genau dann, wenn A und $(A|b)$ den selben Rang haben. Das ist etwa immer der Fall, wenn A invertierbar ist.

Frage

Sei $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m < n$ eine nicht lineare Funktion. Was können Sie über die Lösungen $f(x) = b$ aussagen?

Antwort

Ist f stetig differenzierbar und ist $x = (\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ eine Lösung von $f(x) = b$ mit $\partial_\eta f(\xi_0, \eta_0)$ invertierbar. Dann gibt es ein $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ offen und ein $g \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$ mit $g(\xi_0) = \eta_0$ und $f(\xi, g(\xi)) = b$ für alle $\xi \in W$.

Frage

Ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe?

Antwort

Ja. Es gilt das Assoziativgesetz, 0 ist das neutrale Element und zu $x \in \mathbb{Z}$ ist $-x$ das Inverse. Die Gruppe ist sogar abelsch.

Frage

Können Sie einen Körper mit Charakteristik 6 nennen?

Antwort

Nein, da Körper nur 0 oder eine Primzahl als Charakteristik haben können. Aber $6 = 3 \cdot 2$ ist keins von beiden.

Frage

Wie ist ein Polynom definiert, und wo liegt der Unterschied zu einer Polynomfunktion?

Antwort

Sei R ein kommutativer Ring. Formal ist ein Polynom f definiert als Folge $f : \mathbb{N} \to R,\ n \mapsto a_n$ in R, bei der nur endlich viele Glieder ungleich 0 sind. Die zu f gehörige Polynomfunktion hingegen ist eine Funktion $R \to R$, die jedem $a \in R$ die Auswertung $f(a)$ von f bei a zuordnet.

Frage

Was macht $\mathbb{C}$ gegenüber $\mathbb{R}$ besonders?
Gibt es Nachteile?

Antwort

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, d.h. jedes nicht konstante Polynom in $\mathbb{C}[x]$ hat eine Nullstelle. Das ist in $\mathbb{R}$ nicht der Fall, wie man am Beispiel $x^2 + 1$ erkennt. Nachteil: $\mathbb{C}$ kann man nicht anordnen.

Frage

Wie viele Elemente enthält der kleinste Körper?

Antwort

Ein Körper K muss ein neutrales Element 0 bezüglich Addition und ein neutrales Element 1 bezüglich Multiplikation enthalten, $1 \neq 0$, also $|K| \geq 2$. Andererseits kennen wir einen Körper mit zwei Elementen, nämlich $\mathbb{F}_2$. Die Antwort ist also: Zwei Elemente.

Frage

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Wie kann man, ohne das charakteristische Polynom auszuwerten, die Eigenwerte von A bestimmen?

Antwort

Die Spalten von A sind offensichtlich linear abhängig, also $\ker A \neq \{0\}$. Damit ist 0 ein Eigenwert von A. Weiter ist $A \cdot (1,1)^T = (1,1)^T$, also ist auch 1 ein Eigenwert von A. Aus Dimensionsgründen gibt es keine weiteren Eigenwerte.

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle x, dann ist f injektiv.

Antwort

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung stetig und hat keine Nullstelle. Nach dem Zwischenwertsatz gilt daher entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In beiden Fällen folgt, dass f streng monoton und damit injektiv ist.

Frage

Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Begründen Sie auf so viele Arten wie möglich.

Antwort

Ja. Mögliche Begründungen: $\det A \neq 0$. $\ker A = \{0\}$. Die Spalten/Zeilen von A sind linear unabhängig. A ist regulär, wie man durch Gauß-Elimination erkennt. Was sind weitere zur Invertierbarkeit einer Matrix äquivalente Aussagen?

Frage

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Wann kann man erwarten, dass es eine orthonormale Basis von V bestehend aus Eigenvektoren einer linearen Abbildung $V \to V$ gibt?

Antwort

Etwa wenn die lineare Abbildung normal ist. Das geht aus dem Spektralsatz hervor.

Frage

Zeigen Sie, dass die Determinante, aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, stetig ist. Folgern Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ stetig ist.

Antwort

Die Determinante ist ein Polynom in den Einträgen von A (Leibniz-Formel) und deshalb stetig. Insbesondere ist die Inversenbildung stetig, da man A^{-1} durch die Adjunkte von A ausdrücken kann. Und diese besteht aus vielen (stetigen) Determinanten.

Frage

Warum konvergiert die Exponentialreihe überall in $\mathbb{C}$?

Antwort

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)$$

$$\left| \frac{a_{k+1}(z)}{a_k(z)} \right| = \frac{|z|}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ und mit dem Quotientenkriterium folgt, dass $\exp(z)$ konvergiert.

Frage

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Geben Sie Definitionsbereich und Bildbereich von $\mathrm{D}f$ (der Ableitung von f) an.

Bonusfrage: Welchen Definitions- und Bildbereich hat D?

Antwort

$\mathrm{D}f$ ist eine Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $\mathrm{D}f(x)$, welche f in der Nähe von x approximiert, zuordnet. Bezeichnet also $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so ist $\mathrm{D}f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Frage

Leiten Sie, ausgehend von der Gleichung

$$Ax = \lambda x, \qquad (*)$$

her, wie man Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren einer Matrix A bestimmt.

Antwort

Bezeichnet I die Einheitsmatrix, so ist $(*)$ gleichbedeutend mit der Gleichung $(A - \lambda I)x = 0$. λ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $x \neq 0$ gibt, der diese Gleichung löst. Eine solches x gibt es genau dann, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$, und die Eigenvektoren zu λ sind in $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

Frage

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie durch direkte Verwendung der Definition der totalen Ableitung, dass $\mathrm{D}f(x) = A$ für alle x.

Antwort

Es ist $r(h) := f(x+h) - f(x) - Ah = 0$
und damit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

also $\mathrm{D}f(x)(h) = Ah$.

Frage

Was beschreibt die Determinante von n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ geometrisch?

(damit ist die Determinante der $n\times n$-Matrix mit den n Vektoren in den Spalten gemeint)

Antwort

Sie beschreibt das n-dimensionale Volumen des von den Vektoren aufgespannten Spats.

Was ist die Idee hinter der Ableitung?

Antwort

Wie man direkt an der Definition der (totalen) Ableitung (im beliebigdimensionalen) ablesen kann handelt es sich um eine Lineare Abbildung, die die Funktion umso genauer an einem Punkt repräsentiert, je kleiner die (ε-)Umgebung gewählt wird.

Was haben Matrizen mit linearen Abbildungen zu tun? (endlichdimensionaler Fall)

Antwort

Jede lineare Abbildung lässt sich als Matrix darstellen und umgekehrt repräsentiert jede Matrix eine lineare Abbildung. (Die Spalten einer Matrix sind die Bilder der Basisvektoren und wegen linearer Fortsetzung ist dadurch die lineare Abbildung eindeutig bestimmt).

Was beschreibt das eigentliche Integral einer positiven Funktion im eindimensionalen geometrisch?

Antwort

Es beschreibt (auf dem Intervall $[a,b]$) das zweidimensionale Volumen der Fläche, die zwischen dem Graphen $\{(t, f(t)) \mid t \in [a,b]\}$ und den Strecken $[(a,0), f(a,0)]$, $[(b,0), f(b,0)]$ sowie $[(a,0),(b,0)]$ liegt.

Frage

Sei $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$. Zeigen Sie, dass A mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

formal: $\exists x \in \mathbb{R}^7 \setminus \{0\}\ \exists \lambda \in \mathbb{R} : Ax = \lambda x$

Antwort

Betrachte $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - A)$. χ_A ist stetig und

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \chi_A(\lambda) = -\infty$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \chi_A(\lambda) = +\infty.$$

Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz von $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ mit $\chi_A(\tilde{\lambda}) = 0$

Frage

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(A) < 0$.
Zeigen Sie: A ist reell diagonalisierbar

Antwort

$\chi(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - A)$ ist ein Polynom vom Grad 2 und $\chi(0) < 0$, $\lim_{|\lambda| \to \infty} \chi(\lambda) = +\infty$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz von $\lambda_1 \in \mathbb{R}_{<0}, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\chi(\lambda_1) = \chi(\lambda_2) = 0$. Da A maximal zwei Eigenwerte haben kann, ist A auch diagonalisierbar.

Frage

Die Menge der regulären $n\times n$-Matrizen mit Werten in $\mathbb{R}$ ist dicht in der Menge aller reellwertigen $n\times n$-Matrizen.

Hinweis: $M \subset X$ liegt dicht in $X \iff$
$\forall x \in X\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

Antwort

Sei $\det(A) = 0$; $f(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id + A)$ ist ein Polynom vom Grad n, also mit maximal n Nullstellen. Also gilt $f(\frac{1}{k}) \neq 0$ für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$. Deshalb ist $A_k = \frac{1}{k} Id + A$ regulär für alle hinreichend großen k und außerdem ist $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.

Frage

Zeigen Sie:
Ein Polynom $f \in K[x]$ besitzt höchstens so viele Nullstellen wie sein Grad.

(in einem Körper K)

Antwort

Beweis durch Induktion nach $deg(f)$.

$n = 0 \implies f$ konstant und $\neq 0$. ✓

$n > 0$: ist c Nullstelle, so ist $f = (x-c)g$ mit $\deg(g) = n-1$. Für eine weitere Nullstelle b gilt dann: $0 = (b-c)g(b)$. Ist $b \neq c$ so muss $g(b) = 0$ sein. Aus der Induktionsannahme dass g höchstens $n-1$ Nullstellen hat folgt die Behauptung.

Gibt es unbeschränkte konvergente Folgen
(in einem normiertem Raum)?

Antwort

Nein. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge. Nach Definition gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon$. Wähle n_0 so dass die Aussage für $\varepsilon = 1$ gilt. Alle Folgenglieder sind dann durch $C := \max\{\|x_0\|, \ldots, \|x_{n_0}\|, \|x\| + 1\}$ beschränkt.

Frage

Wie wirken sich elementare Zeilenoperationen auf die Determinante aus?

Antwort

Multiplikation mit Skalar a verändert die Determinante um den Faktor a^n. Der neue Wert ist also $a^n \det(A)$.

Vertauschen zweier Zeilen besitzt als Permutation ein negatives Vorzeichen und ändert damit das Vorzeichen der Determinante.

Skalare Addition einer Zeile auf eine andere verändert den Wert der Determinante nicht.

Frage

Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Sei $(A'|b')$ eine Matrix, die durch elementare Zeilenoperationen aus $(A|b)$ hervorging. Warum haben $A'x = b'$ und das ursprüngliche Gleichungssystem die gleiche Lösungsmenge?

Antwort

Jede elementare Zeilenoperation an der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ lässt sich durch eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_n$ ausdrücken: $A' = MA$ und $b' = Mb$. Aus $Ax = b$ folgt $MAx = Mb$, und aus $MAx = Mb$ auch $Ax = M^{-1}MAx = M^{-1}Mb = b$. Also sind die Lösungsmengen gleich.

Frage

Zeige: Ist $Ax = b$ ein LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten, so gilt

$$\det(A) \cdot x_i = \det(A_i),$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des LGS ist und A_i jene Matrix bezeichnet, die aus A durch Ersetzen der i-ten Spalte mit b hervorgeht. (Cramersche Regel)

Antwort

Sei X_i die Einheitsmatrix, deren i-te Spalte durch die Lösung x des LGS ersetzt wurde. Entwickeln nach dieser Spalte liefert $\det(X_i) = x_i$. Außerdem ist Ae_j die j-te Spalte von A und $Ax = b$, also insgesamt $AX_i = A_i$. Daraus ergibt sich $\det(A_i) = \det(AX_i) = \det(A)\det(X_i) = \det(A)x_i$.

Frage

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen mit den selben n paarweise verschiedenen Eigenpaaren (Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren). Dann gilt $A = B$.

Antwort

Sei S die Matrix mit den Eigenvektoren von A als Spalten. Sei weiter D eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge die zu den Eigenvektoren zugehörigen Eigenwerte sind. Dann gilt $A = SDS^{-1}$. Es gilt außerdem auch $B = SDS^{-1}$, da B die selben Eigenpaare wie A hat, also $A = B$.

Frage

Beweise

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

mithilfe der Dreiecksungleichung.

Antwort

Wegen $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$ haben wir $|x| - |y| \leq |x-y|$, und durch Vertauschen von x und y erhält man auch $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$. Beide Ungleichungen zusammen ergeben $||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x-y|$.

Zeige: Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, so ist auch $(|a_n|)_n$ konvergent.

Antwort

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n \to \infty} a$, sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Für diese Indizes folgt dann $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, also $|a_n| \to |a|$.

Zeige den Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede reelle beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.

Antwort

Wir verwenden die Aussagen *Jede beschränkte, monotone Folge ist konvergent* und *Jede reelle Folge hat eine monotone Teilfolge*. Beide gemeinsam ergeben direkt den Satz.

Bonusaufgabe: Beweise die erste hier verwendete Aussage.

Frage

Sei $M \subsetneq \mathbb{R}$ eine Menge, die dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Zeige, dass M nicht abgeschlossen ist.

Antwort

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus M \neq \emptyset$. Da M dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine Folge (x_n) in M mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Damit ist M nicht abgeschlossen.

Frage

Sei P_n der Ring allerPolynome vom Grad $\leq n$, und $\varphi\colon P_3 \to P_3,\ p \mapsto p'$. Gebe eine Darstellungsmatrix von φ an. Ist φ surjektiv/injektiv? Ändere gegebenenfalls Definitionsbereich und Bildbereich so ab, dass φ bijektiv wird. Welche anschauliche Bedeutung hat die Umkehrabbildung?

Antwort

Die Darstellungsmatrix D von φ bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ lautet

$$D = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 2e_2 & 3e_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

φ wird als Abbildung $P_3/\ker\varphi \to P_2$ bijektiv. Die Umkehrabbildung kann man als Integration interpretieren, wobei die Integrationskonstante ignoriert wird.

Frage

Sei V eine Gruppe, die von einer endlichen Menge S erzeugt wird. Sei weiter $E = \{\{v,w\} \subset V \mid \exists\, s \in S : w = s \cdot v\}$. Ist der Graph $G = (V,E)$ zusammenhängend?

Bonusfrage: Zeichne den zur Kleinschen Vierergruppe $H = \{0,a,b,a+b\}$ mit Erzeuger $S = \{a,b\}$ gehörenden Graphen.

Antwort

Seien $v, w \in V$. Da S Erzeugendensystem ist, gibt es $s_1, \ldots, s_k \in S$ mit $wv^{-1} = s_1 \cdots s_k$, und es folgt $w = wv^{-1}v = s_1 \cdots s_k v$. Damit sind v und w über die Knoten $s_k v, s_{k-1} s_k v, \ldots, s_2 \cdots s_k v$ durch einen Weg miteinander verbunden. Der Graph ist also zusammenhängend.

Frage

Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Zeige in diesem Fall den Satz von Cayley-Hamilton: $\chi_A(A) = 0$, wobei χ_A das charakteristische Polynom der Matrix A bezeichnet.

Tipp: Betrachte $\chi_A(A)v$ mit v Eigenvektor von A.

Antwort

Für ein Eigenpaar (λ, v) von A gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(A)v &= a_n A^n v + \cdots + a_1 A v + a_0 v \\ &= a_n \lambda^n v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v \\ &= \chi_A(\lambda) v = 0 \cdot v = 0.\end{aligned}$$

Laut Voraussetzung gibt es eine Basis aus Eigenvektoren von A, woraus schließlich $\chi_A(A) = 0$ folgt.

Frage

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gibt es eine Matrix B mit reellen Einträgen, sodass $B^2 = A$ gilt? Was ist, wenn wir komplexe Einträge zulassen?

Antwort

Es muss $-1 = \det(A) = \det(B)^2$ gelten. Damit ist $\det(B) = \pm i$ nicht reell, also kann B auch keine reelle Matrix sein. Wir lösen die Gleichung $B^2 = A$ eintragsweise in $\mathbb{C}$ auf und erhalten z.B.

$$B = \begin{pmatrix} 0.5+0.5i & 0.5-0.5i \\ 0.5-0.5i & 0.5+0.5i \end{pmatrix}.$$

Gibt es eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gleichzeitig $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \geq 0$, $\sum_{n\geq 0} a_n < \infty$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$ erfüllt?

Antwort

Da die Reihe konvergiert, muss $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gelten, im Widerspruch zu $\limsup_{n\to\infty} a_n > 0$. Dies zeigt, dass es eine solche Folge (a_n) nicht geben kann.

Frage 09/2022

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 2^{-k/2}, & \exists\, k \in \mathbb{N} : 2^k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass diese Folge $a_n \geq 0$, $\sum_{n\geq 1} a_n < \infty$ und $\limsup_{n\to\infty} n a_n > 0$ erfüllt.

Antwort

$a_n \geq 0$ ist klar. Die Reihe $\sum_{k\geq 1} 2^{-k/2}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, da $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^{-k/2}} = 2^{-1/2} < 1$. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$. Die Folge $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine Teilfolge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = 2^k 2^{-k/2} = 2^{k/2} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, also insbesondere $\limsup na_n > 0$.

Frage

Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe divergiert.

Antwort

Für alle $m \geq 1$ gilt

$$\left|\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k}\right| \geq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2},$$

womit das Cauchy-Kriterium für $\varepsilon = 1/2$ verletzt ist. Also divergiert die harmonische Reihe.

Frage

Wie lautet die Leibnizformel?

Antwort

$$A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}};$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Frage

Definiert $\langle f, g\rangle := f(0)g(0)$ auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein Skalarprodukt?

Antwort

Nein. Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist nicht die Nullfunktion, aber $\langle f, f \rangle = 0$. Damit ist die positive Definitheit verletzt und somit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kein Skalarprodukt.

Frage

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Bonusfrage: Wie würde der Beweis für untere Dreiecksmatrizen lauten?

Antwort

$A_{i,j}$ bezeichne die Matrix, die aus A durch Entfernen von Zeile i und Spalte j entsteht. Induktionbeweis: $k = 1$: $\det(A) = a_{1,1}$. Sei $k > 1$. Durch Entwicklung nach der ersten Spalte (mit nur einem Eintrag) folgt $\det(A) = a_{1,1} \cdot \det(A_{1,1})$. Da $A_{1,1}$ wiederum eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt die Behauptung via Induktion.

Frage

Sei A eine quadratische Matrix. Für welche b ist $Ax = b$ lösbar, falls das homogene Gleichungssytem $Ax = 0$ eindeutig lösbar ist?

Antwort

$Ax = 0$ eindeutig lösbar $\iff$ $\operatorname{kern}(A) = \{0\}$ $\iff$ A injektiv. Da A quadratisch ist, folgt aus der Injektivität die Surjektivität. Also ist $Ax = b$ für alle b (sogar eindeutig) lösbar.

Frage

Wie kann man auf einem Blick die Eigenwerte sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erkennen?

Antwort

Es handelt sich um eine Matrix in Jordannormalform mit einem Jordankästchen der Länge 2 zum Eigenwert 0. Das bedeutet dass die Matrix nur den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2 (Länge des Kästchens) und geometrischer Vielfachheit 1 (Anzahl der Kästchen) besitzt.

Sei Q eine orthogonale Matrix.
Bestimmen Sie $\|Q\|_2$.

Antwort

Sei Q orthogonal. Per Definition ist $Q^T Q = I$. Daraus folgt $\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx\rangle_2 = (Qx)^T(Qx) = x^T(Q^T Q)x = x^T I x = \langle x, x\rangle_2 = \|x\|_2^2$, also $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$. Damit ist $\|Q\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Qx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$

Frage

Zeigen Sie, dass es bei fixer Dimension nur endlich viele orthogonale Diagonalmatrizen gibt.

Bonusfrage: Gilt die Aussage auch für unitäre Diagonalmatrizen?

Antwort

Für eine orthogonale Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und jeden Einheitsvektor e_k gilt $\|Ae_k\|_2 = 1$ wegen der Orthogonalität und $Ae_k = ae_k$ wegen der Diagonalität. Daraus folgt für alle Diagonaleinträge $a_k \in \{-1, 1\}$. Kombinatorisch ergeben sich damit 2^n orthogonale Diagonalmatrizen.

Frage

Zeigen Sie, dass

$$f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$$

nicht gleichmäßig stetig ist.

Antwort

Wir müssen die Negierung der gleichmäßigen Stetigkeit $\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ zeigen. Wähle $\varepsilon := 1$. Sei $\delta > 0$. Setze $x := -\frac{\delta}{3}$, $y := \frac{\delta}{3}$. Dann ist $|x - y| = \frac{2}{3}\delta < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| = |(-1) - 1| = 2 \geq \varepsilon$.

Frage

Betrachte die Funktion T_n, die jeder Funktion f ihr Taylorpolynom $T_n(f)$ n-ten Grades zuordnet. Welchen (maximalen) Definitionsbereich, und welchen (minimalen) Bildbereich hat diese Funktion? Ist sie linear?

Antwort

Definitionsbereich: Menge aller n-mal differenzierbaren Funktionen. Bildbereich: Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$. Da Summen und skalare Multiplikation mit Ableiten vertauscht werden können, ist die Funktion T_n linear.

Frage

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 729 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\sqrt[3]{A}$.

(gesucht ist eine Matrix X mit $X^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 729 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$)

Antwort

$0 = \det \begin{pmatrix} x & 729 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 3^6 \iff x = \pm 3^3$,
also diagonalisierbar. Eigenvektor für 3^3:

$$\ker \begin{pmatrix} 3^3 & -3^6 \\ -1 & 3^3 \end{pmatrix} = \ker(3^3 \ \ -3^6) = \begin{pmatrix} 3^3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

analog ist $\begin{pmatrix} 3^3 \\ -1 \end{pmatrix}$ für -3^3. Mit $S = \begin{pmatrix} 3^3 & 3^3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
ist $A = S \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & -3^3 \end{pmatrix} S^{-1} = \left(S \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} S^{-1} \right)^3$.
Also ist $S \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 81 \\ 1/9 & 0 \end{pmatrix}$ Lösung.

Berechnen Sie von Hand $\cos(1)$ mithilfe der Taylorentwicklung um 0. Dabei soll die Abweichung vom tatsächlichen Wert weniger als $\frac{1}{100}$ betragen.

Antwort

Cosinus als Taylorentwicklung um 0:

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Die 1 ins Taylorpolynom 5ten Grades eingesetzt ergibt $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$.

Abweichung nach Restgliedformel:

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^5}{5!} \cos^{(6)}(1) \right| \leq \frac{1}{5!} < \frac{1}{100}$$

Zeigen Sie, dass die reelle Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt.

Antwort

Kontraposition: Hätte e^x eine Nullstelle, so hätte auch $e^x \cdot e^{-x} = 1$ eine Nullstelle

Kann man für eine 8×8-Matrix mit vollem Rang eine geschlossene Form für die Berechnung der Eigenwerte finden?

Antwort

Nein. Da die Matrix vollen Rang hat, ist das charakteristische Polynom von Grad 8. Wegen des Satzes von Abel-Ruffini gibt es im allgemeinen keine Lösung in Radikalen für Polynome von Grad ≥ 5, also keine so genannte „geschlossene Form“.

Besitzt der Cosinus einen Fixpunkt? Lässt sich dieser per Fixpunktiteration finden?

Antwort

Ja und ja. Kurze Skizze zeigt, dass es genau einen Fixpunkt gibt, der zwischen 0.5 und 1 liegt. Auf die abgeschlossene Menge $[0,1]$ ist der Fixpunktsatz von Banach anwendbar, mit Kontraktionszahl

$$k = \max_{x\in[0,1]} cos'(x) = |-sin(1)| < 1.$$

$\Longrightarrow$ Fixpunktiteration gut möglich.