ANALYSIS

NORMIERTE RÄUME

Stetigkeit

Norm

Offene Mengen

Konvergenz

APPROXIMATION VON FUNKTIONEN

Diffbarkeit im Eindimensionalen

Taylor-entwicklung

Diffbarkeit im Mehr-dimensionalen

LÖSEN NICHT-LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

Satz über inverse Funktionen

Satz über implizite Funktionen

INTEGRALE

Als ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen Lineare Algebra und Analysis:

MATRIX-EXPONENTIAL

DIESE ZUSAMMENFASSUNG IST NICHT VOLLSTÄNDIG!

KANN FEHLER ENTHALTEN!

Quellen: Analysis 1/2 Skript Martin Brokate WS 16/17 SS 17

1. NORMIERTE RÄUME

(Voraussetzung: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bekannt)

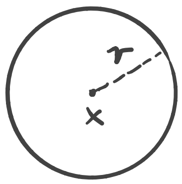
1.1 Grundbegriffe

$\mathbb{R}$-Vektorraum X + Norm $\|\cdot\|$ → Normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$

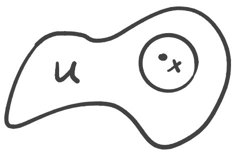
(Eigenschaften: Lin A) ("Längenmessung")

$\mathbb{R}^n$, stetige / beschr. Fkt., ... euklidische Norm, Supremumsnorm, ...

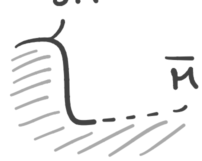
Ermöglicht Definition folgender Begriffe



→



$\forall x \in U$ → $A = X \setminus U$ →



Kugel $B_r(x)$ (allgemein auch Beschränktheit)

offene Menge U

abgeschlossene Menge A

Rand, Inneres, Abschluss

Ermöglichen, Analysis zu betreiben. Am Anfang steht der Begriff der ...

1.2 Konvergenz

$x_n \to x \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N: \;\; x_n \in B_\varepsilon(x)$

disjunkte Kugeln

Durch Hausdorffsche Trennungseigenschaft ist der Grenzwert in normierten Räumen eindeutig.

Kompakte Mengen $K \subset X$ kompakt, wenn alle Folgen $(x_n)_n$ in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K haben.

(alternative Definition: endliche Überdeckungseigenschaft)

Verbindung zu den obigen Begriffen

- Konvergenz & Abschluss:

  $x \in \overline{M} \iff \exists (x_n)_n$ in M: $x_n \to x$,

  M abgeschlossen $\iff M = \overline{M} \iff \big((x_n)_n$ in M, $x_k \to x \Rightarrow x \in M \big)$

- K kompakt $\Rightarrow$ beschränkt und abgeschlossen

  $\Leftarrow$ gilt in $\mathbb{R}^n$ (BOLZANO-WEIERSTRASS) aber in keinem ∞-dim normierten Raum.

Vollständigkeit $(x_n)_n$ konvergent $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ Cauchy-Folge

$x_n \to x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n,m \geq N \; \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| \leq \varepsilon$

Aber Cauchy-Folge $\Rightarrow$ konvergent nicht in jedem Raum! (Beschränktheit schon). z.B. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht vollständig (Wurzeln)

$\mathbb{R}^n$ ist vollständig und somit Banachraum. Grund: Bolzano-Weierstraß. $(x_n)_n$ Cauchy-Folge: $\exists N \in \mathbb{N}$: $\|x_n - x_N\| < 1 \;\; \forall n \geq N \Rightarrow$ $\|x_n\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + 1\} \Rightarrow M = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ beschränkt und abgeschlossen $\overset{\text{Weierstraß}}{\Rightarrow}$ (x_n) hat konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $x \in M$. Nun gilt schließlich:

$\|x_k - x\| \leq \|x_k - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \to 0$ für $k \to \infty$ $\square$

Weiteres Beispiel für Banachraum: $(B(D, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$

Anmerkung: "Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent." Das hat zur Folge, dass Eigenschaften wie "ist konvergent" im $\mathbb{R}^n$ nicht von der gewählten Norm abhängen. Im ∞-dimensionalen stimmt diese Aussage nicht!

Konvergenz von Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ definiert über die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen $s_n = x_1 + \dots + x_n$. <u>Absolute Konvergenz</u> = Konvergenz der reellen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Es gilt abs. konv $\Rightarrow$ konv. in Banachräumen und $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Konvergenzkriterien in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bzw. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$

QUOTIENTEN

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \to q < 1$$

Exponentialreihe wohldefiniert!
$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
mit Cauchyprodukt
(...)

MAJORANTE

$|x_k| \leq y_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergent

WURZEL

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x_k|} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}$$

NOTWENDIGE BEDINGUNG

$x_n \to 0$

$\boxed{\text{Konvergenz}}$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{absolute Konvergenz}}$

CAUCHY

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} x_k \right| < \varepsilon$$

Harmonische Reihe divergiert

LEIBNIZ

(x_k) monoton fallend, $x_k \to 0$

$\Longrightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ konvergiert

+ Fehlerabschätzung

Alternierende Harmonische Reihe konvergiert

(s_n) beschränkt (wegen Monotonie)

1.2 Stetigkeit

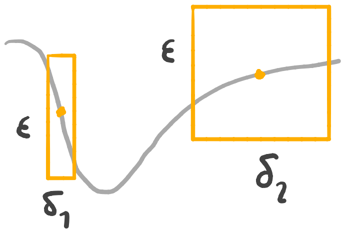
(Für lineare Funktionen alles äquivalent)

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $D \subset X$, $f: D \to X$.

- PUNKTWEISE f stetig in $a \in D$, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D: \|x - a\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon$

($a_n \to a$ in $X \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$ in Y)

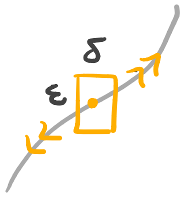


- GLEICHMÄSSIG stetig in D, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D: \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$

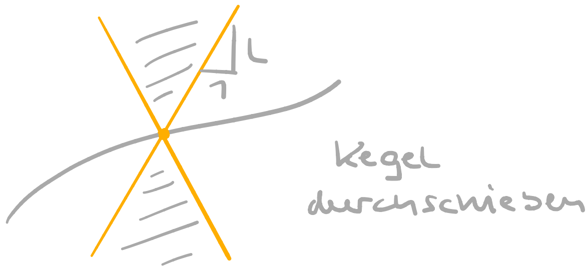
(wenn D kompakt $\Rightarrow$ äquivalent zu punktweise)

(Bild: zu ε ein δ fest gewählt, Rechteck "durchschieben")



- LIPSCHITZ in D, wenn $\exists L > 0$:

$\forall x, y \in D: \|f(x) - f(y)\|_Y \leq L \cdot \|x - y\|_X$



Bsp $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ PUNKTWEISE, nicht GLEICHMÄSSIG

$(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ GLEICHMÄSSIG, nicht LIPSCHITZ.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ LIPSCHITZ

Sätze $f: X \to Y$ stetig auf X

$\Leftrightarrow$ Urbild offener Mengen ist offen.

$\Leftrightarrow$ Urbild abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

$\Rightarrow$ Bilder kompakter Mengen sind kompakt.

Auf Kompaktum $K \subset X$ nehmen stetige Funktionen $K \to \mathbb{R}$ Max. und Min. an.

Sätze über stetige Funktionen in $\mathbb{R}$

Zwischenwertsatz $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)\cdot f(b) < 0$.

Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit $f(x) = 0$.

Beweisskizze Fall $f(a) < 0$: $G = \{ t \in [a,b] : f(t) < 0 \} \neq \emptyset$ und beschränkt $\Rightarrow$ $s = \sup G \in \mathbb{R}$. Für Folge $x_n \in G$ mit $x_n \to s$: $f(x_n) \to f(s)$, $f(x_n) < 0$, also $f(s) \leq 0$. Für Folge $G \not\ni s + \frac{1}{n} \to s$: $f(s+\frac{1}{n}) \to f(s)$, $f(s+\frac{1}{n}) \geq 0$, also $f(s) \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(s) = 0$. $\square$

Erhalt strikter Ungleichungen $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Gilt $f(a) > y$, dann gibt es $\delta > 0$ sodass $f(x) > y$ $\forall x \in D \cap (a-\delta, a+\delta)$. (Das gleiche gilt für $<$)

Beweisskizze: Falls δ nicht existiert $\Rightarrow$ Es gibt Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ und $f(x_n) \leq y$ $\Rightarrow$ $f(a) = \lim f(x_n) \leq y$ ↯

Bijektivität (Eine erste Version des Satzes über inverse Fkt.)

$D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$

$f: D \to f(D)$ bijektiv und $f^{-1}: f(D) \to D$ streng monoton wachsend.

Einschränkung(en) finden, sodass f bijektiv wird. Hier nur Bild eingeschränkt.

Übertragung der Eigenschaften auf f^{-1}.

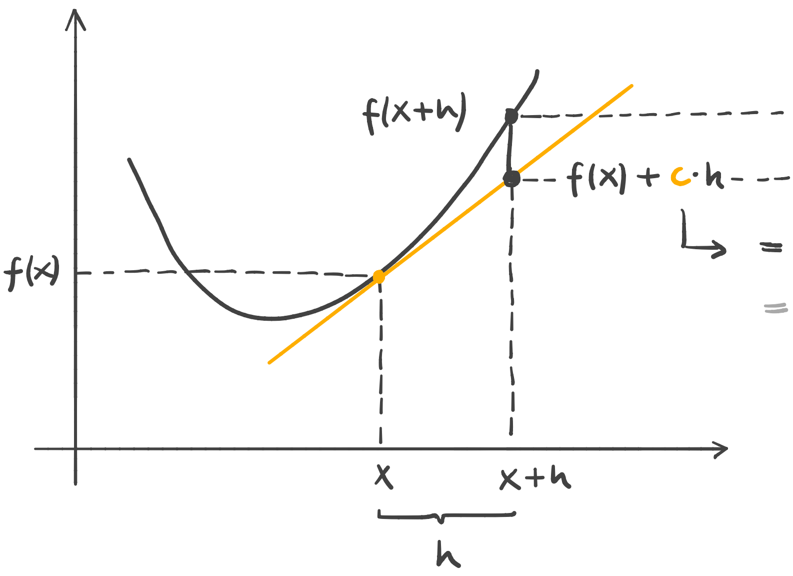
Gleiches Schema bei dieser Version: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv und $f^{-1}: [f(b), f(a)] \to [a,b]$ stetig und streng. mon. w.

($[f(a), f(b)] = f([a,b])$ wegen Zwischenwertsatz)

2. Approximation von Funktionen

2.1 Differenzierbarkeit im Eindimensionalen

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{int} D$. f heißt differenzierbar in x, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$.



$r(h) = f(x+h) - f(x) - c \cdot h$

c = Steigung der Tangente

= Darstellungsmatrix jener linearen Abbildung, die f lokal um x "am besten" approximiert.

c ist eindeutig bestimmt und wir schreiben $f'(x) = c$.

Vergleiche Jacobi-Matrix im Mehrdimensionalen!

Die obige Definition kann man wortwörtlich übertragen.

Im Eindimensionalen eher üblich: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

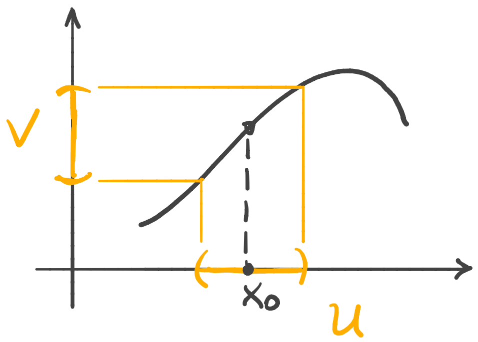
Das ist mit Obigem äquivalent.

Diffbar $\Rightarrow$ stetig denn $\frac{|r(h)|}{|h|} \to 0$ impliziert $r(h) \to 0$ für $h \to 0$, also $f(x+h) \to f(x)$ für $h \to 0$. Außerdem bilden die diffbaren Fkt $D \to \mathbb{R}$ einen Unterraum von $C(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ (wegen $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Daraus folgt auch: $f \mapsto f'$ ist eine lineare Abbildung!)

Satz über die Umkehrfunktion (Version 3, vgl. Bijektivität in Sätze über stetige Funktionen in $\mathbb{R}$) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und diffbar in einem Punkt $x \in (a,b)$ mit $f'(x) \neq 0$ $\Rightarrow$ $f: [a,b] \to f([a,b])$ bijektiv und $f^{-1}: f([a,b]) \to [a,b]$ stetig, streng monoton und diffbar im Punkt $y := f(x)$ mit $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Lokale Version: $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Sei $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Da f' stetig gibt es wegen



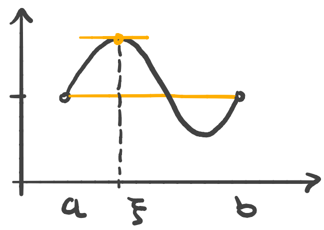
Erhalt strikter Ungleichungen eine Umgebung U von x_0, sodass $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in U$. $f: U \to V = f(U)$ ist dann bijektiv und $f^{-1}: V \to U$ stetig diffbar mit $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ $\forall x \in U$.

Im Mehrdimensionalen Fall wird der Satz über inverse Funktionen genauso formuliert.

Notwendige Optimalitätsbedingung
$f'(x) = 0$

$\Longrightarrow$

Satz von Rolle
$f \in C[a,b]$ diffbar in (a,b).
$f(a) \neq f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$



Wende Rolle an auf
$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

Mittelwertsatz
"Schiefer Satz von Rolle"

$f, g \in C[a,b]$ diffbar in (a,b)
$g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b): \frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{g(b)-g(a)}_{\neq 0 \text{ nach Rolle}}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$\Longrightarrow$ **Bedingungen für Monotonie, Hinreichende Optimalitätsbedingungen für $f \in C^2$.**

2.2 Taylorentwicklung im Eindimensionalen

Bisher können wir eine in a differenzierbare Funktion f mit der affinen Abbildung $x \mapsto (T_1 f)(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ in einer Umgebung um a so approximieren, dass für den Fehler $\eta_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f(x) - (T_1 f)(x)$ gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{\eta_1(x)}{x-a} = 0$$

Unter welchen Umständen können wir ein Polynom $T_n f$ vom Grad n finden mit

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{\eta_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \left(\eta_n(x) = o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a \right)} \qquad (*)$$

wobei hier $\eta_n(x) = f(x) - (T_n f)(x)$?

Potenzreihen (Motivation für Formel von $T_n f$) Betrachte Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ mit Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

In $(a-r, a+r)$ ist f unendlich oft stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1}, \quad \ldots, \quad f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k k \cdots (k-m+1)(x-a)^{k-m}.$$

Für $x = a$ ergibt sich $f^{(m)}(a) = c_m m! + 0 + 0 + \cdots$,

also $c_m = \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}$. Dies motiviert die Definition

$$\boxed{(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}$$

Hier: $f^{(0)}(a) = f(a)$, $0! = 1$ und $0^0 = 1$

Satz Ist $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f \in C^n(I)$ und $a \in I$, so gilt $(*)$ mit $T_n f$ und η_n wie oben definiert. D.h. wir können „f lokal um a polynomiell gut approximieren".

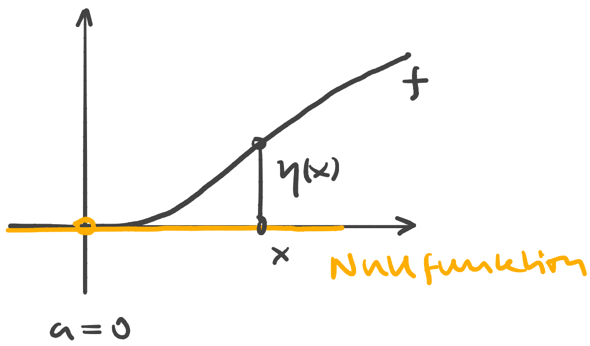
Beweis mit einer Integralformel für das Restglied.

Konvergiert $T_n f$ gegen f (punktweise) für $n \to \infty$?

Nach obiger Rechnung gilt das tatsächlich, wenn f eine Potenzreihe ist. Im Allgemeinen ist diese Behauptung jedoch falsch!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



$\eta(x)$ geht "exponentiell schnell" gegen 0 für $x \to 0$ und damit schneller als x^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Nullfunktion würde die Approximationseigenschaft $(*)$ also erfüllen, und tatsächlich ist $T_n f = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Daher $T_n f \not\to f$.

2.3 Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

Wir wollen Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzieren ...

Kurven sind stetige Funktionen $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^m$

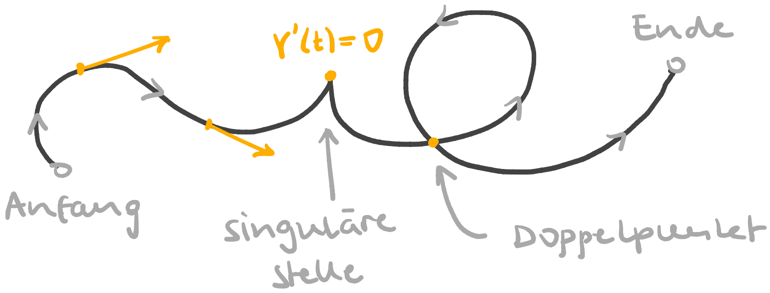
$(I \subset \mathbb{R})$, die Ableitung wird komponentenweise definiert:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_m'(t) \end{pmatrix}$$

γ ist also genau dann differenzierbar in t, wenn alle Komponenten $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ es sind.

Interpretation:

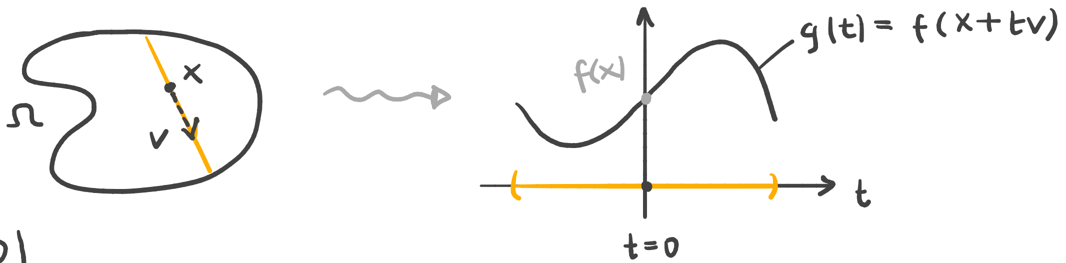
Geschwindigkeit



Skalarfelder sind Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$.

Man definiert für solche f die Richtungsableitung an der Stelle $x \in \Omega$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ als

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \quad \leftarrow \text{Das ist } g'(0)$$



Für $v = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Position

Wenn $\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)$ $\forall x \in \Omega$ existieren, nennen wir f partiell diffbar

ist $\partial_i f(x) = \partial_{e_i} f(x)$ die i-te partielle Ableitung. Wir können daraus $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))^T$ bilden (Richtung des steilsten Anstiegs).

Wenn $\partial_1 f, \dots, \partial_n f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig sind, heißt f stetig differenzierbar. Für $f \in C^2(\Omega)$ gilt der Satz von Schwarz $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$.

Differenzierbarkeit für Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$:

f heißt diffbar in $x \in \Omega$, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, die f lokal um x am besten approximiert, d.h.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - L(h) \|}{\| h \|} = 0 .$$

In diesem Fall ist f stetig und (all ihre Komponenten) partiell differenzierbar in x, und die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Standardbasis ist die Jacobi-Matrix $(m \times n)$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — \nabla f_1(x)^T — \\ \vdots \\ — \nabla f_m(x)^T — \end{pmatrix} .$$

Insbesondere ist L eindeutig bestimmt, wir schreiben $L = Df(x)$. Manchmal ist es einfacher, $Df(x)(h)$ für alle Vektoren h anzugeben anstelle der Jacobi-Matrix (z.B. bei Matrix-Funktionen)

Es gilt: Lipschitz stetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig

stetig diffbar $\Rightarrow$ diffbar $\Rightarrow$ stetig

diffbar $\Rightarrow$ partiell diffbar

Man kann Beispiele finden, für die die roten Pfeile nicht gelten. Das beweist bereits, dass alle bis auf die angegebenen Implikationen falsch sind.

Anmerkung zu $\Rightarrow$ Für differenzierbare Skalarfelder $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^m)$ gilt: $\partial_v f(x)$ existiert und $\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$. Das ist für partiell diffbare Skalarfelder nicht der Fall! (Kann man ausnützen, um "part. diff. aber nicht diff" zu zeigen)

Optimalitätsbedingungen Für Skalarfelder $f \in C^2(\Omega)$ ist die Hessematrix $\nabla^2 f(x) = D(\nabla f)(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{ij}$ symmetrisch nach Satz von Schwarz und es gilt:

- x lokales Min/Max
  $\Rightarrow$ $\nabla f(x) = 0$ und $\nabla^2 f(x)$ ist pos/neg semidefinit

- $\nabla f(x) = 0$ und $\nabla^2 f(x)$ ist pos/neg definit
  $\Rightarrow$ x striktes lokales Min/Max

3. LÖSEN NICHT-LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

3.1 Satz über inverse Funktionen

(vgl. mit 1-dim)

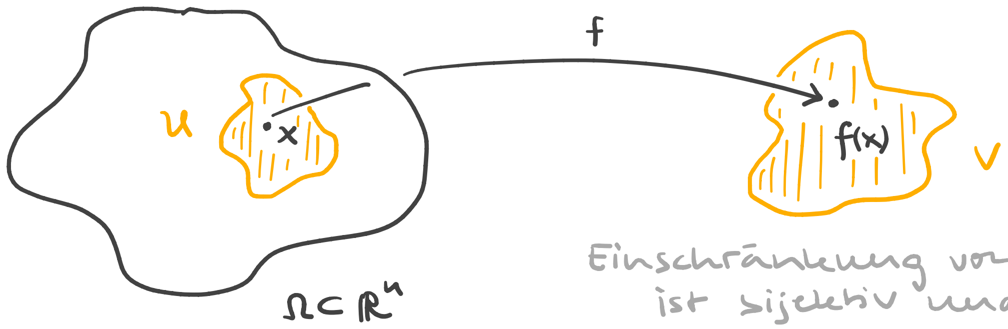
Text $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ k-mal stetig diffbar, $x_0 \in \Omega$. Dann sind äquivalent:

(Beweis mit Fixpunktsatz von Banach)

i) $Df(x_0) \in GL_n(\mathbb{R})$

ii) Es gibt $U \subset \Omega$ offen, $x_0 \in \Omega$, und es gibt $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(x_0) \in U$, sodass $f: U \to V$ bijektiv und $f^{-1}: U \to V$ k-mal stetig differenzierbar ist (mit $Df^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1}$ $\forall x \in U$)

Bild



Einschränkung von f ist bijektiv und die Umkehrabbildung wieder (k-mal) ste diff

Interpretation Haben wir eine Lösung x_0 für das Gleichungssystem $f(x_0) = y_0$ (n Gleichungen, n Unbekannte) mit $Df(x_0)$ invertierbar, so wissen wir, dass auch die Gleichungssysteme $Df(x) = y$ für y "in der Nähe von y_0" eindeutige Lösungen x "in der Nähe von x_0" haben. Spezialfall $f(x) = A \cdot x$ linear: Falls $Df(x_0) = A$ invertierbar, wissen wir aus der linearen Algebra, dass $Ax = y$ sogar für alle $y \in \mathbb{R}^n$ lösbar ist.

3.2 Satz über implizite Funktionen

Text Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ k-mal stetig diff'bar, $x_0 = (\xi_0, \eta_0) \in \Omega$ mit $f(\xi_0, \eta_0) = 0$ und $D_\eta f(\xi_0, \eta_0) \in GL_m(\mathbb{R})$

$\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^m$

$$Df(\xi_0,\eta_0) = \begin{array}{c} \\ m \end{array}\!\!\begin{array}{cc} n & m \\ \left(\begin{array}{c} D_\xi f(\xi_0,\eta_0) \end{array}\right. & \left.\boxed{D_\eta f(\xi_0,\eta_0)}\right) \end{array}$$

partielle Ableitungen nach den Komponenten von ξ_0

partielle Ableitungen nach den Komponenten von η_0

<u>Allgemein:</u>

Suche Spalten in $Df(x_0)$, die zusammen eine invertierbare quadratische Matrix ergeben. Die zu diesen Spalten gehörenden Komponenten von x_0 spielen die Rolle von η_0.

Dann gibt es $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi_0 \in U$, und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\eta_0 \in V$, mit $U \times V \subset \Omega$,

(braucht man nur, damit f auf $U \times V$ definiert ist)

und eine k-mal stetig diff'bare Funktion $g: U \to V$ sodass $\operatorname{graph} g = \{(\xi,\eta) \in \Omega : f(\xi,\eta) = 0\} \cap (U \times V)$

(oder: $f(\xi, \eta(\xi)) = 0 \quad \forall \xi \in U$). Es gilt außerdem

$$Dg(\xi) = D_\eta f(\xi, g(\xi))^{-1} D_\xi f(\xi, g(\xi)) \quad \forall \xi \in U.$$

Bild (für $m = n = 1$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

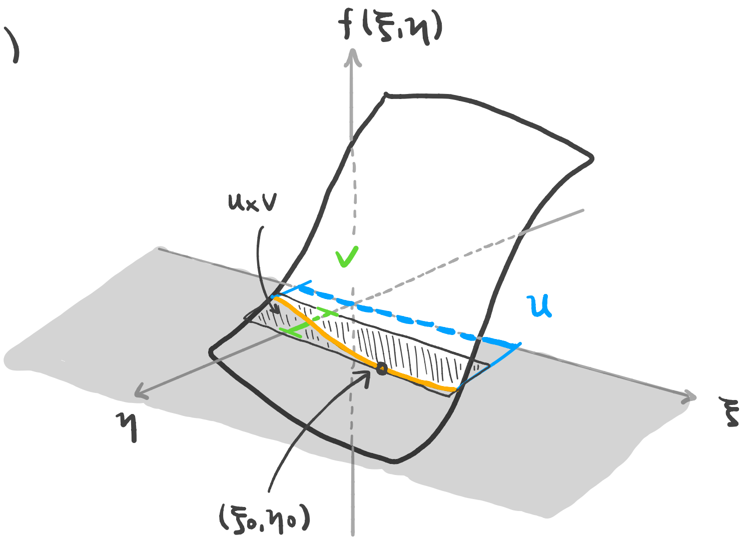
gelbe Linie

=

Menge aller (ξ,η) im Rechteck $U \times V$ für die $f(\xi,\eta) = 0$ gilt

=

Graph einer Funktion $g: U \to V$



(ξ_0, η_0) mit $f(\xi_0,\eta_0) = 0$ und $\partial_\eta f(\xi_0,\eta_0) \neq 0$

Interpretation Hat man ein Gleichungssystem $f(x) = 0$ mit $n+m$ Unbekannten und nur m Gleichungen, also $f: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, und eine Lösung $x_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m+n)}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben, so kann man in einer Umgebung $U \times V$ um x_0 alle weiteren Lösungen wie folgt finden:

1. Wähle aus $Df(x_0)$ Spalten $s_1, \dots, s_m$ aus, sodass die Matrix $M = (s_1 | \cdots | s_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar ist (vorausgesetzt, das geht)

2. Der Satz besagt nun, dass man in $U \times V$ die zu den Spalten $s_1, \dots, s_m$ zugehörigen Komponenten $x^{(s_1)}, \dots, x^{(s_m)}$ der Lösungen x durch die übrigen Komponenten $x^{(t_1)}, \dots, x^{(t_n)}$ ausdrücken kann, d.h.

$$\overbrace{(x^{(s_1)}, \dots, x^{(s_m)})}^{\eta} = g\,\overbrace{(x^{(t_1)}, \dots, x^{(t_n)})}^{\xi}$$

mit $g: U \to V$.

für alle Lösungen $x \in U \times V$ von $f(x) = 0$.

Anmerkung: Der Satz sagt nur, dass es ein solches g gibt, aber nicht, wie man es findet!