LINEARE ALGEBRA

1. ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

Gruppen | Ringe | Körper

Vorbereiten (Inhalte, wiederholende Konzepte) auf

2. VEKTORRÄUME MATRIZEN LINEARE ABBILDUNGEN

Die zentralen Themen der LinA

Basiswechsel, Äquivalenz- und Ähnlichkeitsklassen

3. NORMALFORMEN

Determinante | Eigenwerte | Jordansche Normalform

Geometrische Vorstellungen

4. SKALARPRODUKTE UND ORTHOGONALITÄT

DIESE ZUSAMMENFASSUNG IST NICHT VOLLSTÄNDIG!

KANN FEHLER ENTHALTEN!

Quellen: Lineare Algebra Skript Gregor Kemper WS16/17 SS17

1. ALGEBRAISCHE STRUKTUREN:
GRUPPEN

Anhand der Gruppen wollen wir (aufzählend) zeigen, welche Konzepte sich immer wiederholen:

Def $(G,*)$ heißt Gruppe, wenn

Menge mit Verknüpfung(en)

- $(a*b)*c = a*(b*c)\ \forall a,b,c \in G$
- Es gibt ein $e \in G$ mit $e*a = a\ \forall a \in G$ und $\forall a \in G\ \exists a' \in G: a'*a = e$

Eigenschaften, die gelten sollen (minimal)

Schnitt und Erzeugnis G Gruppe, $\mathcal{H}$ Menge von Untergruppen $\Rightarrow$

$\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ ist auch Untergruppe.

Damit ist es möglich, Erzeugnisse zu definieren: $M \subset G$ Teilmenge $\Rightarrow$

$$\langle M \rangle = \bigcap_{\substack{H \subset G \text{ Untergruppe} \\ M \subset H}} H$$

(kleinste Untergruppe, die M enthält)

Die Erzeugung von kleinsten UVR $\langle S \rangle$ oder $\operatorname{span} S$, die alle $v \in S$ enthalten, funktioniert genauso!

Strukturerhaltende Abbildungen

$(G,*)$, $(H,\cdot)$ Gruppen. $\varphi: G \to H$ heißt Homomorphismus, wenn $\varphi(a*b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$ für alle $a,b \in G$.

- $\varphi(e_G) = e_H$
- $\ker\varphi \subset G$ Untergruppe
- $\operatorname{im}\varphi \subset H$ Untergruppe
- $\ker\varphi = \{e_G\} \Leftrightarrow \varphi$ injektiv

Lineare Abbildungen
$\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$
$\varphi(v+w) = \varphi(v)+\varphi(w)$
funktionieren genauso

Isomorphie G, H isomorph, wenn es Isomorphismus (Hom + bijektiv) $G \to H$ gibt

2. VEKTORRÄUME, MATRIZEN, LINEARE ABBILDUNGEN

2.1 Vektorräume

Sei K ein Körper. Wir haben wieder eine Menge V und Verknüpfungen $+: V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ und fordern Eigenschaften

- $(V,+)$ abelsche Gruppe
- $\forall a,b \in K \ \forall v,w \in V$: $(a+b)v = av + bv$, $a(v+w) = av + aw$, $(ab)v = a(bv)$ und $1v = v$.

(Hom. später)

Wir können nun die Konzepte **Schnitt** und **Erzeugnis** analog übertragen und näher betrachten...

Natürliche **Frage**, die man sich an diesem Punkt stellt: Wie schaut $\langle S \rangle$ für eine Menge $S \subset V$ genau aus?

Linearkombinationen

$$\langle S \rangle = \{ v \in V : \underbrace{v \text{ ist Linearkombination von } S}_{} \}$$

Es gibt endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ sodass $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

Es stellt sich eine weitere **Frage**, nämlich nach der Eindeutigkeit einer solchen Linearkombination. Hierzu

Lineare Unabhängigkeit wenn $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall v_1, \dots, v_n \in S$ paarweise verschieden gilt: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ dann sind die Linearkombinationen eindeutig.

$\hookrightarrow$ V einfach beschreiben durch **Basis** B (linear unabhängig und $\langle B \rangle = V$)

MAX MIN

vgl. Spannbaum eines Graphen

Frage: Gibt es eine Basis überhaupt immer?

Basisergänzungssatz

Vektorraum

$$U \subseteq S \subseteq V \implies \text{Es gibt Basis } B \text{ von } V \text{ mit } U \subset B \subset S$$

linear unabhängig   erzeugt V

- Existenz: $U = \emptyset$ und $S = V$
- Man kann vorgegebenes U zu einer Basis B ergänzen
- Man kann vorgegebenes S zu einer Basis B reduzieren

Was man bei Basen zeigen kann: Im endlichen Fall haben zwei Basen B, B' von V gleich viele Elemente $|B| = |B'| =: n$. Wir setzen dann die **Dimension** von V $\dim V = n$, und $\dim V = \infty$ falls keine endliche Basis existiert.

$\hookrightarrow$ Argumentationen **aus Dimensionsgründen** möglich

Wir werden uns nun das dritte sich wiederholende Konzept **Homomorphismen** näher anschauen.

2.2 Lineare Abbildungen

$\varphi: V \to W$ sind VR-Hom oder genauer: $\varphi(v + \lambda w) = \varphi(v) + \lambda \varphi(w)$.

Grundlegende Eigenschaften ähnlich wie vorher:
$\varphi(0) = 0$; $\ker \varphi = \{ v \in V : \varphi(v) = 0 \}$ und $\operatorname{im} \varphi$ sind UVR von V bzw W; φ injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker \varphi = \{0\}$.

Struktur? $\operatorname{Hom}(V,W)$ wird mit $+, \cdot$ punktweise ein VR.
$\operatorname{Hom}(V,V)$ wird mit punktweise $+$ und $\circ$ ein Ring.

Ein sehr wichtiger Satz ist der **Dimensionssatz** für lineare Abbildungen: $\dim V < \infty$, $\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$.

$\{w_1, \dots, w_r\}$ Basis von $\operatorname{im}\varphi$
$u_1 \in \varphi^{-1}(\{u_1\}), \dots, u_r \in \varphi^{-1}(\{u_r\})$

$\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $\ker \varphi$

$\Rightarrow$ $B = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k\}$ ist Basis von V und insbesondere haben wir $\dim V = \dim(\operatorname{im}\varphi) + \dim(\ker \varphi)$.

Pf: Sei $v \in V$, schreibe $\varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$ und setze $v' = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$. $\varphi(v) = \varphi(v')$ $\Rightarrow$ $v - v' \in \ker\varphi$, also $v - v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu v_k$, also $v = \sum \lambda_i u_i + \sum \mu_j v_j$ $\Rightarrow$ $\langle B \rangle = V$.
Lineare Unabhängigkeit: Sei $\sum \lambda_i u_i + \sum \mu_j v_j = 0$.
φ auf beiden Seiten ergibt $\sum \lambda_i w_i = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_i = 0$
$\Rightarrow$ $\sum \mu_j v_j = 0$ $\Rightarrow$ $\mu_j = 0$ $\square$

Weitere wichtige Aussagen

- Prinzip Lineare Fortsetzung
- $\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$, $\dim V = \dim W < \infty$. Dann sind äquivalent
  φ injektiv $\Leftrightarrow$ φ surjektiv $\Leftrightarrow$ φ bijektiv

  links-invertierbar = rechts-invertierbar = invertierbar

  im Ring $\operatorname{Hom}(V,V)$

In allgemeinen Ringen ist
linksinvertierbar $\neq$ rechtsinvertierbar

2.3 Matrizen

Zunächst wollen wir Matrizen nur als Hilfsmittel zur Bestimmung der Lösung(en) eines LGS verstehen:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \longrightarrow A \cdot x = b$$

Lösung $x \in K^n$

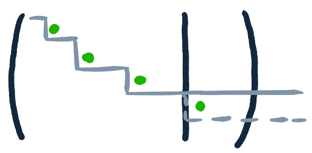
Koeffizienten-matrix $(m \times n)$

rechte Seite $b \in K^m$

Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$

Wichtig, da alle rechnerischen Probleme hierauf zurückzuführen sind!

Lösungsmethode? Gauß-Algorithmus!

$(A|b) \longrightarrow$ 

$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,(A|b) \Rightarrow$ Lösbar

hier steht $0 = \bullet \neq 0 \Rightarrow$ nicht lösbar

Spezialfall $b = 0 \Rightarrow$ immer lösbar ($x = 0$ ist Lösung).
Außerdem: $Ax = 0 \quad Ay = 0 \quad \lambda \in K \Rightarrow A(x+\lambda y) = Ax + \lambda Ay = 0$
$\Rightarrow \ker A = \{x \in K^n : Ax = 0\}$ ist ein UVR und hat Dimension $\dim \ker A = n - \mathrm{rg}\, A = \#$ freie Parameter

Lösungsraum allgemein von $Ax = b$:

$$L = \begin{cases} x + \ker A, & \text{falls } \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,(A|b) \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei x spezielle Lösung von $Ax = b$ ist.

$\hookrightarrow$ **Folgerung** Eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\, A = n = \mathrm{rg}\,(A|b)$

Man braucht also mindestens n Gleichungen für eindeutige Lösbarkeit!

Nun wollen wir Matrizen als mathematische Objekte an sich näher kennenlernen. zB können wir folgende Beobachtung machen: Gauß ändert den Zeilenraum Z nicht $\Rightarrow$ $\dim Z = \operatorname{rg} A$.

Struktur? $K^{m \times n}$ wird ein Vektorraum mit $A+B$ und $\lambda \cdot A$ eintragsweise. $K^{n \times n}$ wird mit $A+B$ eintragsweise und Matrixmultiplikation $A \cdot B$ ein Ring.
$\Rightarrow$ Alles Gelernte über VR (Ringe) kann man auf (quadratische) Matrizen übertragen.

zB: Rechenregeln, Begriff Invertierbarkeit, Einheitengruppe $GL_n K = \{ A \in K^{n \times n} : A \text{ invertierbar} \}, \ldots$

vgl. $\operatorname{Hom}(V,W)$ und $K^{m \times n}$ als VR
und $\operatorname{Hom}(V,V)$ und $K^{n \times n}$ als Ringe

Wann ist eine Matrix invertierbar? Um das zu beantworten muss man Matrizen als Lineare Abbildungen auffassen.
Alle drei Sichtweisen verbinden $\Rightarrow$ Reichhaltige Theorie!

2.4 Matrizen und lineare Abbildungen: Invertierbarkeit, Darstellungsmatrizen und Basiswechsel

V, W Vektorräume, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Matrizen A in $K^{m\times n}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ verbinden durch Koordinatensysteme

dim V

$$\Phi_B : K^n \to V, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \qquad \text{Isomorphismus}$$

Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V

Koordinatenvektor von v bzgl Basis B

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r] & K^m \arrow[u, "\Phi_C"'] \end{tikzcd}$$

$\varphi_A : v \mapsto Av$

(für jedes A eine lineare Abbildung)

Wie A passend zu φ wählen?

Spalten = Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren (B) bzgl C.

zB $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $f \mapsto f'$

mit Basen $B = \{1, x, x^2\}$, $C = \{1, x\}$:

$\varphi(1) = 0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzgl. C

$\varphi(x) = 1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi(x^2) = 2x \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow K^{m\times n} \cong \mathrm{Hom}(V,W)$ als Vektorraum.

Außerdem $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ (per Def der Matrixmult.)

$\Rightarrow K^{n\times n} \cong \mathrm{Hom}(V,V)$ als Ring

Wir unterscheiden nicht mehr zwischen A und φ_A.

Konsequenzen

- $\overset{\text{Spalten}}{S\text{-rang}} = \dim(\operatorname{im} A) \overset{\text{Dim-Satz}}{=} n - \dim(\ker A) \overset{n - \operatorname{rg} A}{=} \operatorname{rg} A = \overset{\text{Zeilen}}{Z\text{-Rang}}$

- Berechnung Inverse $(m = n)$

$$
\begin{array}{c|c|c}
\varphi_A \text{ injektiv} & \varphi_A \text{ linksinvert bzgl } \circ & A \text{ linksinvert bzgl } \cdot \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \; ! \\
\varphi_A \text{ surjektiv} & \varphi_A \text{ rechtsinvert bzgl } \circ & A \text{ rechtsinvert bzgl } \cdot
\end{array}
$$

Es reicht also $A \cdot x_j = e_j \ \forall j$ zu lösen, $A^{-1} = (x_1 | \cdots | x_n)$.

Algorithmisch $(A | I_n) \xrightarrow{\text{Gauß}} (I_n | A^{-1})$.

- Kriterien für die Invertierbarkeit:

obige Überlegung

A invertierbar $\iff \varphi_A$ surjektiv $\iff \varphi_A$ injektiv

$\iff \ker A = \{0\} \overset{\dim \ker A}{\iff} \operatorname{rg} A = n$ (A ist regulär)

Vorher

($Ax = 0$ eindeutig lösbar)

$\iff$ Zeilen sind linear unabhängig

$\iff$ Spalten sind linear unabhängig

$\iff Ax = b$ eindeutig lösbar $\forall b \in K^n$

$\operatorname{rg} A = n = \underbrace{\operatorname{rg}(A|b)}$

Automatisch, da
$n = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|b) \leq \min\{n, n+1\} = n$

Anderes Koordinatensystem wählen? Basiswechsel!

$$
\begin{tikzcd}
 & K^n \arrow[dl, "\phi_B"'] \arrow[dd] \\
V & \\
 & K^n \arrow[ul, "\phi_{B'}"]
\end{tikzcd}
$$

Wechsle von B nach B':

$\phi_{B'} \circ \phi_B$

- Wechsel ist wieder Isomorphismus

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, bend left, "A"] \arrow[dr, "\phi_B"] & & & K^m \arrow[dl, "\phi_C"'] \\
 & V \arrow[r, "\varphi"] & W & \\
K^n \arrow[uu, "T"] \arrow[ur, "\phi_{B'}"'] \arrow[rrr, bend right] & & & K^m \arrow[uu, "S"'] \arrow[ul, "\phi_{C'}"]
\end{tikzcd}
$$

$N = S^{-1} A T$

A und N heißen äquivalent und im Fall $V = W$, $m = n$, $B = C$, $B' = C'$ ähnlich

3. NORMALFORMEN

Matrizen, die ähnlich oder äquivalent sind, tun als lineare Abbildung in gewisser Weise das gleiche $\Rightarrow$ Es macht also Sinn, sie zusammenzufassen und gute Vertreter einer Äquivalenz / Ähnlichkeitsklasse zu suchen.

Äquivalenz Wir kennen: $A \in K^{m \times n}$, $\{w_1, \dots, w_r\}$ Basis vom Bild, u_i Urbild von w_i für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von ker A

$\Rightarrow$ $B = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k\}$ ist Basis von K^n $(\underbrace{r}_{\text{rg} A} + \underbrace{k}_{n - \text{rg} A} = n)$

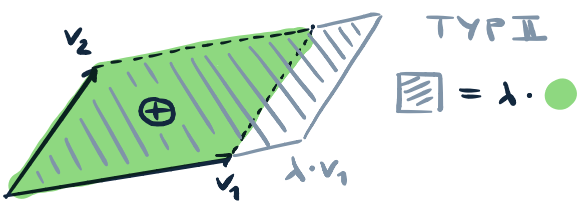
Ergänze außerdem $\{w_1, \dots, w_r\}$ zu einer Basis $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ von K^m.

A bezüglich Basen B und C ? $\begin{array}{c} \\ r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ (Smith-NF über Körper)

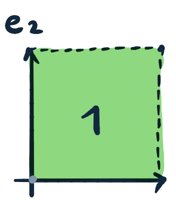
Also: $A, B \in K^{m \times n}$ äquivalent $\Leftrightarrow$ $\text{rg} A = \text{rg} B$

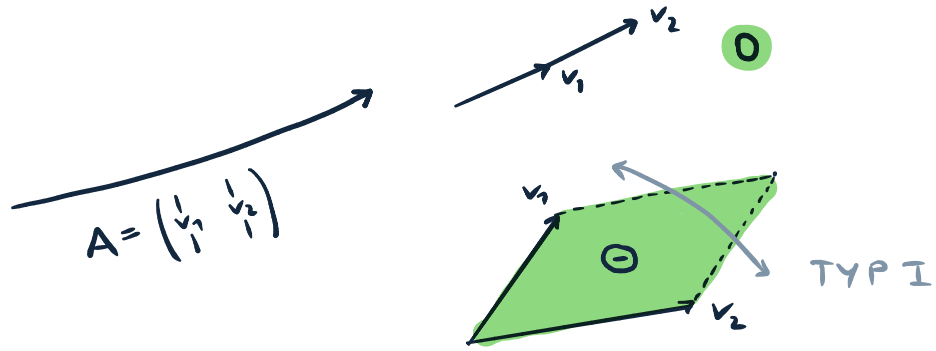
Ähnlichkeit schwieriger, da Basis B gleich Basis C!
Um gute Vertreter zu finden, brauchen wir noch ...

3.1 Determinanten



Ordne $A \in K^{n \times n}$ einen Wert $\det A \in K$ zu, der beschreibt, wie sich Volumina unter A verändern:

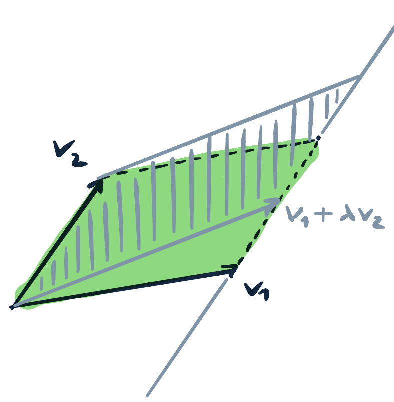




$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

ORIENTIERUNG!

TYP III



$\Downarrow$

$\Rightarrow$ Zusammen mit $\det A^T = \det A$ erkennt man sofort geometrisch, wie det sich während des Gauß-Algorithmus verändert!

Gauß = Parallelogramm „gerade" rücken!

Formal Operationen als Matrixmultiplikation mit speziellen Matrizen auffassen und den **Det-Mult-Satz** verwenden:

$$\det AB = \det A \cdot \det B .$$

Hieraus folgt auch: $\det S \cdot \det S^{-1} = \det I_n = 1$, also (1)

$$S \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det S \neq 0 .$$

Falls $\det S \neq 0$, so können wir über die Adjunkte

$C = \left((-1)^{i+j} \det(S_{ji}) \right)_{i,j}$ eine Inverse $S^{-1} = \frac{1}{\det S} C$ finden.

Außerdem folgt aus (1) $\det S^{-1} = (\det S)^{-1}$ und damit
$\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \cdot \det S \cdot \det A = \det A \Rightarrow$

Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante

Berechnung Gauß + Laplace-Entwicklung + besondere Gestalt (Blockdiagonalmatrix, Dreiecksmatrizen, ...)

Analytische Eigenschaften von $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

Als Polynom unendlich oft stetig diffbar.
Mit dieser Eigenschaft kann man nun spielen:
$\Rightarrow GL_n\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ offen und dicht.
Was kann man über $A \mapsto A^{-1}$ aussagen?

3.2 Eigenwerte, Diagonalisieren, Jordansche NF

Wir wollen einen guten Vertreter der Ähnlichkeitsklasse einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ finden (Basiswechsel).

Ansatz „Mit etwas Glück" finden wir linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in K^n$ mit $Av_i = \lambda_i v_i \;\; \forall i \;\; (\lambda_i \in K)$. Dann ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis und mit $S = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ gilt

(STD steht für Standardbasis)

$$\underbrace{S^{-1}}_{\text{Wechsel STD} \to B} \cdot \overbrace{A}^{\text{Ausführen in STD}} \cdot \underbrace{S}_{\text{Wechsel } B \to \text{STD}\,!} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \to \text{A diagonalisierbar}$$

Berechnung $Av = \lambda v$ oder $(\lambda I_n - A)v = 0$ hat genau dann Lösungen $v \neq 0$, wenn $\ker(\lambda I_n - A) = E_\lambda \neq \{0\}$, also wenn

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - \operatorname{tr} A \cdot \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A = 0$$

Diagonalisierbarkeit $\iff \sum_{EW} m_g(\lambda) = n$

Beobachtung: $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ für EW λ

über $\mathbb{C}$ o.k.

$\Rightarrow$ A diagbar, wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt ($\sum_{EW} m_a(\lambda) = n$) und $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ für alle EW λ.

zB alle EW nur einfache Nst ...

Was passiert, wenn $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$? **Jordansche NF**

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$m_a(2) = 2$
$m_g(2) = 2$

$m_a(2) = 2 = \#$ 2er in der Diagonalen
$m_g(2) = 1 = \#$ Kästchen

$m_a(2) = 4$
$m_g(2) = 2$

$$\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{matrix} \to \text{Rangformeln}$$

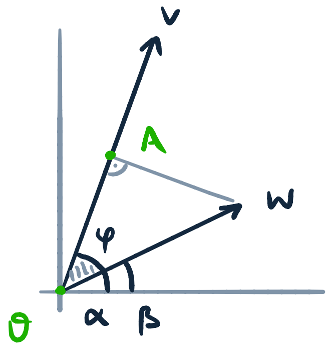
Fragen • Hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n ungerade, einen reellen EW?

• Zeige: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A < 0 \Rightarrow A$ diagbar!

Lösung mit Zwischenwertsatz, angewendet auf das Polynom χ_A!

4. SKALARPRODUKTE UND ORTHOGONALITÄT

Keine Möglichkeit, Längen oder Winkel zu messen.
Idee: Skalierte Schatten mit Vorzeichen



$$\begin{aligned}
\langle v,w\rangle &= \|v\| \cdot \overline{0A} = \|v\|\,\|w\| \cos\varphi \\
&= \underbrace{\|v\|\cos\alpha}_{v_1} \cdot \underbrace{\|w\|\cos\beta}_{w_1} + \underbrace{\|v\|\sin\alpha}_{v_2} \cdot \underbrace{\|w\|\sin\beta}_{w_2} \\
&= v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 \\
&= \text{Standardskalarprodukt}
\end{aligned}$$

Wir erkennen die Beziehungen $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

und $\cos\varphi = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

v,w orthogonal $\Longleftrightarrow$ kein Schatten $\Longleftrightarrow$ $\langle v,w\rangle = 0$

Allgemeiner $\mathbb{R}$-VR Das 'Wesen' des Skalarprodukts erkennen: $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn

- bilinear $\langle u, v+aw\rangle = \langle u,v\rangle + a\langle u,w\rangle$
  $\langle u+av, w\rangle = \langle u,w\rangle + a \cdot \langle v,w\rangle$ — über $\mathbb{C}$: sesquilinear
- symmetrisch $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$ — hermitesch
- positiv definit $\langle v,v\rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$ — >0 impliziert reell!

... und dann die Begriffe Länge, Winkel, Orthogonalität per Formel übertragen.

Darstellungsmatrix für ein Skalarprodukt?

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear. Seien $v, w \in V$

mit $v = \sum \lambda_i v_i$, $w = \sum \mu_j v_j$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ und

$$A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}, \qquad A = \begin{pmatrix} - a_i^T - \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum_i \lambda_i \sum_j \mu_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i \lambda_i (a_i^T \mu) = \lambda^T \cdot (A\mu) = \lambda^T A \mu$$

- $\langle\,\rangle$ symmetrisch, wenn A symmetrisch (hermitesch)
- $\langle\,\rangle$ pos def, wenn A pos def.

Analytisches Beispiel Warum wird auf $C[a,b]$ durch $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ ein Skalarprodukt definiert?

Bilinear, weil Integral linear. Symmetrisch: klar.

Pos def: $f \neq 0 \Rightarrow \exists x \in [a,b] : f(x) \neq 0 \overset{\text{stg}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0$

$\forall \xi \in D = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap [a,b] : f(\xi) \neq 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle \geq \int_D f(x)^2\, dx > 0$.

Warum wird auf $R[a,b]$ durch $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ kein Skalarprodukt definiert?

Für $f = \mathbb{1}_{\{a\}}$ gilt $\langle f, f \rangle = 0$ aber $f \neq 0 \Rightarrow$ nicht pos def

Das ist die Indikatorfunktion

Noch ein paar Worte zur Orthogonalität ...

$S \subset V$ heißt Orthonormalsystem wenn $\langle s_1, s_2 \rangle = \begin{cases} 1 & s_1 = s_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

für alle $s_1, s_2 \in S$. Falls $0 \notin S \Rightarrow S$ ist sofort linear unabhängig.

Besonderheit an orthonormalen Basen $B = \{s_1, \dots, s_n\}$ von V: Extraktion von Koeffizienten möglich

$$v = \sum_i \lambda_i s_i \in V \Rightarrow \langle s_j, v \rangle = \sum_i \lambda_i \langle s_j, s_i \rangle = \lambda_j$$

Existenz einer ONB gegeben durch Gram-Schmidt:

IN $v_1, \dots, v_k \in V$ [Basis von V eingeben]

OUT Eine ONB $B = \{s_1, \dots, s_m\}$ von $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset V$

Durch Schatten wegrechnen...